

Tesis de Posgrado

Multiwavelets no separables : construcción y aplicaciones para el procesamiento de imágenes

Ruedin, Ana María Clara

2003

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias
de la Computación de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Ruedin, Ana María Clara. (2003). Multiwavelets no separables : construcción y aplicaciones para el procesamiento de imágenes. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3558_Ruedin.pdf

Cita tipo Chicago:

Ruedin, Ana María Clara. "Multiwavelets no separables : construcción y aplicaciones para el procesamiento de imágenes". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2003.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3558_Ruedin.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



**Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires**

Tesis de Doctorado

**Multiwavelets no separables:
construcción y aplicaciones
para el procesamiento de imágenes**

por

Ana María Clara Ruedin

Director: Dr. Carlos Cabrelli

**Pabellón 1 - Planta Baja - Ciudad Universitaria
(1428) Buenos Aires
Argentina**

e-mail:anita@dc.uba.ar

No 355

Índice General

1	Introducción	7
2	Wavelets en 1d	11
2.1	Introducción	11
2.2	Definiciones y notación	11
2.3	Análisis de multirresolución en una dimensión :	16
2.4	Procesamiento de señales	17
2.4.1	Formulación polifase	25
2.5	Propiedades de las wavelets:	26
2.5.1	Existencia de la función de escala	26
2.5.2	Ortogonalidad	26
2.5.3	Soporte compacto (buena localización en el tiempo)	27
2.5.4	Aproximación polinomial	27
2.5.5	Buena localización en las frecuencias	28
2.6	Propiedades: sus relaciones y consecuencias	30
2.7	Ejemplos	32
2.7.1	Algoritmo cascada	32
2.8	Continuidad de las funciones construídas	37
2.9	Procesamiento de imágenes: wavelets separables	41
2.9.1	Compresión de imágenes	45
2.9.2	Compresión de imágenes: un poco de historia.	48
3	Wav. no separables en 2 dim.	53
3.1	Definiciones y notación	54
3.2	Análisis de multirresolución	57
3.3	Matrices de dilatación (1)	58
3.4	Procesamiento de imágenes	61
3.4.1	Formulación polifase	62
3.5	Propiedades	64
3.5.1	Existencia de la función de escala	64
3.5.2	Ortogonalidad	65
3.5.3	Soporte compacto	65
3.5.4	Aproximación polinomial	65
3.5.5	Buena localización en las frecuencias	66
3.6	Relaciones entre propiedades	67
3.7	Ejemplos	71
3.8	Matrices de dilatación (2)	72

4	Multiwavelets en 1d	77
4.1	Definiciones y notación	77
4.2	Análisis de multirresolución para multiwavelets en 1d	80
4.3	Procesamiento de señales	81
4.3.1	Descomposición de la señal en 2 señales de entrada	83
4.4	Propiedades de las multiwavelets en 1 dimensión	86
4.4.1	Existencia de la función de escala	86
4.4.2	Ortogonalidad	87
4.4.3	Soporte compacto (buena localización en el tiempo)	88
4.4.4	Aproximación polinomial	88
4.4.5	Balanceo	89
4.4.6	Buena localización en las frecuencias	91
	Cuatro filtros pasa-bajos	91
	Cuatro filtros pasa-altos	91
	Dos filtros polifase pasa-bajos	91
	Dos filtros polifase pasa-altos	91
4.5	Propiedades : sus relaciones y consecuencias	92
4.6	Ejemplos	97
4.7	Procesamiento de imágenes	97
5	Multiwavelets bidim. no sep.	105
5.1	Definiciones y notación	105
5.2	Análisis de multirresolución	106
5.3	Procesamiento de imágenes	108
5.3.1	Descomposición de una imagen en 2 imágenes de entrada	113
6	Prop. de la multiwav. no sep.	119
6.1	Existencia de la función de escala	120
6.2	Condiciones de ortogonalidad	121
6.3	Soporte compacto (localización en el tiempo)	122
6.4	Aproximación polinomial	122
6.5	Condición de balanceo	126
6.6	Buena localización en las frecuencias	131
6.6.1	Cuatro filtros pasa-bajos	131
6.6.2	Cuatro filtros pasa-altos	132
6.6.3	Dos filtros polifase pasa-bajos	133
6.6.4	Dos filtros polifase pasa-altos	134
6.7	Ejemplos	138
7	Construcción	141
7.1	Armado del sistema no lineal	141
7.1.1	Configuraciones de índices	141
	8 matrices $H^{(k)}$	141
	10 matrices $H^{(k)}$	142
	14 matrices $H^{(k)}$	142
	18 matrices $H^{(k)}$	143
7.2	Solución del sistema	143
7.2.1	Inconveniencia de las bases de Gröbner para este caso.	143
7.2.2	Optimización numérica: preliminares	145
	El método de Newton	145

Regiones de confianza	145
7.2.3 Gauss-Newton	146
7.2.4 Levenberg-Marquardt	146
7.2.5 Implementación	147
7.3 Gráficos: algoritmo cascada	147
7.3.1 Gráficos de las multifunciones de escala	147
7.3.2 Gráficos de las multiwavelets	149
8 Continuidad de	153
8.1 El conjunto U	153
8.2 Desarrollo D -ádico para los puntos de U	155
8.3 Teselado del plano con U y sus traslaciones	157
8.4 El vector funcional v	160
8.5 Las matrices T_0 y T_1	161
8.6 El radio espectral conjunto	166
El subespacio invariante E	167
Determinación del subespacio invariante E en casos diferentes	170
8.6.1 Estimación del radio espectral conjunto	172
9 Aplicaciones	175
9.1 Compresión	175
9.2 Eliminación de ruido	182
9.3 Interpolación	182
9.4 Detección de bordes	185
10 Conclusiones	189
Bibliografía	191
A.1 Configuraciones de índices	199
A.1.1 8 matrices $H^{(k)}$	199
Caso D1a2b0-001	199
Caso D1a1b1-094	200
Caso D2a2b1-095	202
Caso D2a2b1-081	204
Caso D1a3b1-091	206
A.1.2 10 matrices $H^{(k)}$	208
Caso D1a3b1-298	208
A.1.3 14 matrices $H^{(k)}$	210
Caso D1a2b2-299	210
A.1.4 18 matrices $H^{(k)}$	212
Caso D1a3b1-691	212
Caso D2a3b1-699	214
Caso D2a2b2-499	216
Caso D1a3b2-699	218

Capítulo 1

Introducción

En los últimos 15 años la transformada wavelet - ondelette, ondícula, ondita - ha adquirido gran importancia, y es actualmente objeto numerosas investigaciones. Como herramienta en el procesamiento de imágenes, las wavelets tienen aplicaciones en la compresión de imágenes - son la base del standard JPEG2000 para imágenes, y el FBI usa wavelets para comprimir su base de huellas digitales -, así como en la eliminación de ruido, el análisis de texturas, el reconocimiento de patrones, etc. También se utiliza esta transformada en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, y de ecuaciones integrales. Esta herramienta tiene un marco teórico complejo, el cual brinda una mayor comprensión del análisis de multirresolución de una señal, permite caracterizar a las funciones aproximables por wavelets, y permite estimar la continuidad de las diversas wavelets propuestas. Para dar una idea del grado de dificultad que puede aparecer, mencionemos, por ejemplo, que el problema de probar que una wavelet es Hölder continua está vinculado al problema de probar que el radio espectral conjunto de un número finito de matrices es menor que uno, y éste es un problema no decidible.

Las wavelets son bases de funciones que tienen buena localización tiempo-frecuencia. En una dimensión son dilataciones (cambios de escala en potencias de 2) y traslaciones enteras de una misma función wavelet $\Psi(x)$. Las traslaciones de una versión dilatada de la wavelet generan un subespacio de detalle de una resolución determinada (en lo que sigue $D = 2$):

$$W_j = \overline{\text{gen}\{\Psi(D^j x - k)\}_k}.$$

Representando una señal en estas bases, se obtiene una descomposición de la señal en una suma de detalles de diferente resolución, más una aproximación burda de la señal. La teoría de las wavelets unidimensionales ha sido muy estudiada, y hoy día es bien comprendida. En cambio no sucede lo mismo con diversas generalizaciones de esta transformada, entre ellas las wavelets bidimensionales no separables, y las multiwavelets.

Una wavelet está asociada a una función de escala $\Phi(x)$, la cual verifica una ecuación de dilatación o refinamiento

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^N h_k \Phi(Dx - k).$$

Las traslaciones de una versión dilatada de $\Phi(x)$ generan un subespacio de aproximación de una resolución determinada:

$$V_j = \overline{\text{gen}\{\Phi(D^j x - k)\}_k}.$$

A su vez, la wavelet se puede escribir en términos de la función de escala

$$\Psi(x) = \sum_k g_k \Phi(Dx - k).$$

En el caso unidimensional el factor $D = 2$, y k representa a valores enteros. Los valores h_k son los coeficientes de la función de escala, y los valores g_k son los coeficientes de la wavelet.

La transformada wavelet se puede calcular rápidamente mediante la convolución de la señal con dos filtros, un filtro pasa-bajos y el otro pasa-altos; ambas operaciones son seguidas de una decimación de a 2. En el caso ortogonal el filtro pasa-bajos es $[h_N, h_{N-1}, \dots, h_0]$, y el filtro pasa-altos es $[g_N, g_{N-1}, \dots, g_0]$.

Para procesar una imagen, en general se aplica la transformada wavelet separable. Esta transformada bidimensional es fácil de implementar – se aplica la transformada wavelet de una dimensión por filas y luego por columnas– y hereda las propiedades de la transformada en una dimensión. Pero la transformada separable origina detalles en las direcciones horizontal y vertical, lo cual no corresponde a nuestro sistema de visión, y puede generar distorsiones en estas direcciones si se comprime la imagen. Una solución más general es hallar wavelets bidimensionales no separables. En este caso los filtros son bidimensionales, y D es una matriz que dilata todo el plano. Dos elecciones posibles para D son matrices de 2×2 que producen una decimación en diagonal o al tresbolillo (quincunx, quinconce), como si se eliminaran todas las casillas negras de un tablero de ajedrez.

Otra generalización de la teoría consiste en tomar las traslaciones de versiones dilatadas de r funciones Φ_1, \dots, Φ_r (en vez de una sola) para generar los subespacios de aproximación: estas son las multifunciones de escala, y asociadas a ellas están las multiwavelets (multionditas) que constan de $r(|D| - 1)$ wavelets. Estas pueden verificar propiedades que no pueden cumplir simultáneamente las wavelets tradicionales, como por ejemplo: soporte compacto, simetría y ortogonalidad. En el caso de las multiwavelets unidimensionales, $D = 2$ y los coeficientes h_k son matrices de $r \times r$. Sin embargo, el procesamiento de imágenes con estas multiwavelets en forma separable da como resultado muchas subimágenes, cuyo significado no es intuitivo y es, en cambio, bastante complejo.

Con el objetivo de unir ambos adelantos, en esta tesis se han construido ejemplos de multiwavelets bidimensionales no separables. Están asociadas a alguna de 2 matrices de dilatación, que producen una decimación en diagonal (quincunx). Hasta ahora no se conocían construcciones de multiwavelets bidimensionales no separables. Su construcción y su análisis han permitido comprender mejor la teoría de las wavelets en general. Las multiwavelets construidas verifican diferentes propiedades importantes. La ortogonalidad asegura la estabilidad frente a errores de cuantización en la compresión de imágenes. El soporte compacto da una buena localización espacial de la base, deseable en el tratamiento de imágenes. La continuidad es esencial para poder representar señales suaves, y provee mejores resultados en la magnificación o interpolación de una imagen. La aproximación polinomial de la multifunción de escala proporciona una mayor compresión de las zonas de una imagen que tienen variaciones continuas de color. Se extendió la definición de balanceo para este tipo de wavelets, tomando en cuenta el submuestreo: el balanceo de orden 1 evita tener que prefiltrar la imagen; el de orden 2 está vinculado a la preservación de planos cuando se realiza la transformada. Se cumplen, además, diversas condiciones sobre los filtros que dan una buena localización en las frecuencias. Para éstas multiwavelets, la interpretación visual de la transformada es sencilla. Se desarrolló la teoría para estas multiwavelets. Se analizaron las relaciones existentes entre un conjunto de propiedades, que en el caso de las wavelets de una dimensión son todas equivalentes entre sí, y que no lo son en el caso de las multiwavelets no separables; siendo algunas propiedades mutuamente excluyentes, como el balanceo de orden 2 y la condición sobre el filtro polifase $\nabla F(-1, -1) = 0$. Se elaboró el código de paquetes de rutinas para calcular la transformada multiwavelet no separable a imágenes. Se escribieron programas para calcular en forma aproximada el radio espectral conjunto (por medio de una cota inferior), en orden a estimar el exponente Hölder de continuidad de las funciones construidas, y para determinar si el radio espectral conjunto es menor que 1 – problema NP-hard –, y así probar la continuidad de estas funciones. Finalmente se analizó el desempeño de las multiwavelets construidas en algunos problemas de magnificación de imágenes, de compresión de imágenes, de detección de bordes y de eliminación de ruido, observándose ventajas con respecto a las wavelets tradicionales.

En el capítulo 2 se realiza un breve repaso de la teoría de las wavelets en una dimensión. Se presentan las fórmulas para la transformada y antitransformada wavelet de señales (análisis y síntesis), y las

fórmulas equivalentes que se obtienen de la descomposición de los filtros y de la señal en distintas fases. Se dan ejemplos de funciones de escala y su wavelet asociada, y se analizan diferentes propiedades de las wavelets, tales como su ortogonalidad, y el orden aproximación polinomial, y se estudia como las propiedades de las wavelets se traducen en condiciones sobre los coeficientes de las wavelets. Finalmente, se calcula en forma aproximada el radio espectral conjunto de dos matrices T_0 y T_1 en orden a estimar el exponente de continuidad Hölder de las funciones. Se ilustra la transformada wavelet con ejemplos propios –figuras 2.6, 2.7, 2.8–, se explica en detalle el algoritmo utilizado para graficar las funciones de escala y las wavelets. Asimismo, se presenta en forma detallada la transformada wavelet separable. La sección 2.9.2 es original y relata la historia de la compresión de imágenes.

En el capítulo 3, se da una introducción a las wavelets bidimensionales no separables. Se siguen los lineamientos del capítulo anterior para este tipo de wavelets: primero se repasa la teoría, se analizan las posibles matrices de dilatación, y se dan las fórmulas para el análisis y la síntesis de imágenes. Los ejemplos de la transformada wavelet de imágenes, al igual que los gráficos de las funciones de escala y las estimaciones del radio espectral conjunto, fueron realizados con programas propios. Son aportes originales de este trabajo el teorema 3.2 y la sección 3.8.

En el capítulo 4 se presenta la teoría de las multiwavelets en una dimensión, las fórmulas para la transformada multiwavelet de señales, y la separación de la señal en 2 señales de entrada; se dan ejemplos de multifunciones de escala y de las multiwavelets asociadas; se analizan las diferentes propiedades de las multiwavelets – ortogonalidad, aproximación polinomial, balanceo– y como éstas se traducen en condiciones sobre los coeficientes de las multiwavelets. Son aportes originales de esta tesis la sección 4.4.6, y los lemas 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9.

Los capítulos subsiguientes, consagrados a la teoría y a la construcción de multiwavelets bidimensionales no separables, constituyen el grueso del aporte de este trabajo. En el capítulo 5 se analizan las fórmulas para la transformada multiwavelet de imágenes, la separación de la imagen en 2 imágenes de entrada, y tres interpretaciones de la fórmula de análisis: los coeficientes de aproximación (o de detalle) se calculan i) como productos de las matrices–filtro por vectores de 2 coordenadas formados por las 2 imágenes de entrada, ii) como la suma de 2 convoluciones de las imágenes de entrada con filtros bidimensionales seguidas de un submuestreo con D , iii) como una convolución de la imagen original con un filtro bidimensional polifase seguida de un submuestreo con D^2 . Para ilustrar el procesamiento de imágenes con estas transformadas, se realizaron programas a tal efecto, en los cuales se utilizaron los ejemplos de las multifunciones de escala y las multiwavelets halladas en este trabajo.

En el capítulo 6 se analizan las diferentes propiedades de las multiwavelets – ortogonalidad, aproximación polinomial, balanceo, y localización en las frecuencias– y como éstas se traducen en condiciones sobre los coeficientes de las multiwavelets. Se estudia de qué manera se vinculan estas condiciones entre sí. Se utilizan estas últimas para construir ejemplos de multifunciones de escala no separables y su multiwavelet asociada, por medio de rutinas de optimización numérica, lo cual se detalla en el capítulo 7. Allí también se explica como se grafican los ejemplos hallados.

En el capítulo 8 se trata el tema de estimar la regularidad de las multifunciones de escala y de las multiwavelets construídas, calculando aproximativamente su exponente de continuidad Hölder. Para ello se estudia la forma matricial de la ecuación de dilatación, y se estima el radio espectral conjunto de las 2 matrices T_0 y T_1 . Estas matrices dependen de la manera que se efectúa el cubrimiento del plano por medio del conjunto elemental asociado a la matriz de dilatación. Por último, se ejecuta un programa basado en un algoritmo para determinar si el radio espectral conjunto es menor que 1, y así poder afirmar la continuidad de las funciones calculadas.

En el capítulo 9 se analiza el desempeño de las multiwavelets halladas en diversas aplicaciones, tales como: compresión, interpolación de imágenes, eliminación de ruido, y detección de bordes.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la tesis y se discuten las posibilidades de trabajos futuros en el capítulo 10.

Capítulo 2

Wavelets en una dimensión

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta brevemente la teoría de las wavelets en una dimensión. Se explica como se procede para el procesamiento de señales, y se exhiben ejemplos ilustrativos. Se listan las diferentes propiedades de las wavelets - ortogonalidad, soporte compacto, aproximación polinomial, se analiza como estas propiedades se traducen en propiedades de los coeficientes de las wavelets, y se exponen las relaciones entre diferentes propiedades.

Se dan ejemplos de funciones de escala y su wavelet asociada, se explica con detalle el algoritmo cascada que permite graficarlas, y controla que sea continua calculando el radio espectral conjunto de 2 matrices T_0 y T_1 . De este último se obtiene el exponente de Hölder.

Finalmente se muestra como se procede - el método separable - para transformar imágenes con estas wavelets, y los pasos siguientes para lograr la compresión de las mismas.

Para profundizar sobre el tema, se pueden consultar los libros [1], [2], y [3].

2.2 Definiciones y notación

- El espacio de funciones absolutamente integrables es

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty\}.$$

- El espacio de funciones de cuadrado integrable es

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 dx < \infty \right\}.$$

En este espacio se identifican dos funciones que difieren sobre un conjunto de medida nula.

- Dadas $f(x)$ y $g(x)$ que pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$, se define su producto escalar como

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx.$$

- Dos funciones $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ son *ortogonales* si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = 0.$$

- Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

- Las señales de energía finita forman $l^2(Z) = \left\{ \{f_n\} \text{ tal que } \sum_n f_n^2 < \infty \right\}.$

- Si $\{f_n\} \in l^2(Z)$, se define su norma $\|f\|_2 = \sqrt{\sum_n f_n^2}.$

- Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$, se define su *transformada Fourier* como

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx. \end{aligned}$$

Esta definición se extiende a funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$.

- Dado un filtro f , su *transformada Z* $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se define como

$$F(z) = \sum_{k \in Z} f_k z^{-k}$$

- Dado un filtro f , su *respuesta en frecuencias*, o transformada Fourier discreta en el tiempo, se define como

$$\hat{F} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\hat{F}(w) = \sum_{k \in Z} f_k e^{-ikw}.$$

Nota 2.1. $\hat{F}(w) = F(e^{iw})$.

- Dado un filtro f , se define el símbolo

$$\tilde{F}(w) = \frac{1}{2} \sum_k h_k e^{-ikw} = \frac{\hat{F}(w)}{2}.$$

- Dado un filtro h , se define h' como el reverso de h :

$$h'_k = h_{-k}.$$

Su transformada Z es

$$\sum_k h'_k z^{-k} = \sum_k h_k z^k = F(z^{-1}),$$

y su respuesta en frecuencias es

$$\sum_k h'_k e^{-iwk} = \hat{H}(-w).$$

- Convolución o filtrado:

$$y = x * h \iff y_k = \sum_j x_{k-j} h_j$$

Nota 2.2. Si $y = x * h$, entonces $\hat{Y}(w) = \hat{X}(w) \hat{H}(w)$, y $Y(z) = X(z) H(z)$.

- Un filtro h se denomina *pasa-bajos ideal* si

$$\hat{H}(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |w| < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 \leq |w| < \pi \end{cases}$$

Nota 2.3. Si h es un filtro pasa-bajos ideal, h tiene infinitos términos no nulos. Si $y = x * h$, entonces

$$\hat{Y}(w) = \begin{cases} \hat{X}(w) & \text{para } 0 \leq |w| < \pi/2 \\ 0 & \text{para } \pi/2 \leq |w| < \pi \end{cases},$$

es decir, h "mata" las altas frecuencias de x

- Un filtro h se denomina *pasa-bajos* si existen $w_0, w_1, (w_0 < w_1)$ tales que

$$\hat{H}(w) \approx \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq |w| < w_0 \\ 0 & \text{para } w_1 \leq |w| < \pi \end{cases}$$

y entre w_0 y w_1 , $\hat{H}(w)$ cambia de aproximadamente 1 a aproximadamente 0.

- Un filtro g se denomina *pasa-altos ideal* si

$$\hat{G}(w) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq |w| < \pi/2 \\ 1 & \text{para } \pi/2 \leq |w| < \pi \end{cases}$$

Nota 2.4. Si g es un filtro pasa-altos ideal, g tiene infinitos términos no nulos. Y si $y = x * g$, entonces

$$\hat{Y}(w) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq |w| < \pi/2 \\ \hat{X}(w) & \text{para } \pi/2 \leq |w| < \pi \end{cases},$$

es decir, g "mata" las bajas frecuencias de x

- Un filtro g se denomina *pasa-altos* si existen $w_0, w_1, (w_0 < w_1)$ tales que

$$\hat{G}(w) \approx \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq |w| < w_0 \\ 1 & \text{para } w_1 \leq |w| < \pi \end{cases}$$

y entre w_0 y w_1 , $\hat{G}(w)$ cambia de aproximadamente 0 a aproximadamente 1.

- Submuestreo o decimación de a 2 (downsampling):

$$y = x \downarrow 2 \quad \Leftrightarrow \quad y_k = x_{2k}.$$

A la señal x se le eliminan las componentes pares para formar y , la señal submuestreada.

Nota 2.5. Si $y = x \downarrow 2$, entonces $Y(z) = \frac{1}{2}[X(\sqrt{z}) + X(-\sqrt{z})]$.

- Sobremuestreo:

$$y = x \uparrow 2 \quad \Leftrightarrow \quad y_k = \begin{cases} x_r & \text{si } k \text{ es par, } k = 2r \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

A la señal x se introducen ceros en todas las posiciones impares.

Nota 2.6. Si $y = x \uparrow 2$, entonces $Y(z) = X(z^2)$.

Nota 2.7. Si $y = (x \downarrow 2) \uparrow 2$, entonces $Y(z) = \frac{1}{2}[X(z) + X(-z)]$.

- Se dice que un conjunto en \mathfrak{R}^n es compacto si es cerrado y acotado.
- Se llama *soporte* de una función f al menor conjunto cerrado que contiene a todos los x tales que $f(x) \neq 0$.
- Para $f \in L^2(\mathfrak{R})$ se denomina *momento de orden r* de f a la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$.

Nota 2.8. Si $\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx = 0$ para $r = 0, 1, \dots, m-1$, se dice que f tiene m momentos nulos.

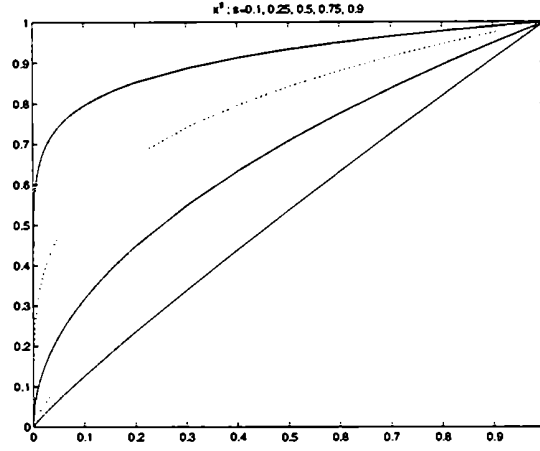


Figura 2.1: h^s para $s = \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$.

- Se dice que f pertenece al espacio de Hölder C^s , con $0 < s < 1$ (o que f es Hölder continua con exponente de Hölder s) si

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^s$$

donde K es una constante. En las condiciones anteriores también se dice que la función f es de Lipschitz con exponente s .

Para una función Hölder continua con exponente s , la diferencia $|f(x_0 + h) - f(x_0)|$ está acotada por $|h|^s$ multiplicada por una constante. En la figura 2.1 se graficó la función h^s ($h > 0$) para diferentes valores de s : vemos que cuanto mayor es s , menos pronunciada es la pendiente de h^s en el origen, y por lo tanto es más suave la función f . En cambio, si f es Hölder continua con s pequeño, por ejemplo $s = 0.1$, en cada punto x_0 la función f puede tener un crecimiento similar al de la curva superior del gráfico en el origen.

- Se dice que f pertenece al espacio de Hölder C^s , con $s \geq 1$ (o que f es Hölder continua con exponente de Hölder s) si $s = m + \alpha$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha < 1$, f es m veces diferenciable con continuidad, y vale

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq K |x - y|^\alpha$$

donde K es una constante.

- El radio espectral de una matriz es el máximo de todos sus autovalores en valor absoluto

$$\rho(A) = \max_j |\lambda_j|.$$

- Dada una imagen A de $M \times N$, y una imagen aproximada \tilde{A} de $M \times N$, se define el error cuadrático medio (o mean square error) como

$$\text{MSE} = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (A_{i,j} - \tilde{A}_{i,j})^2.$$

• Dadas dos imágenes A y \tilde{A} , y MSE el error cuadrático medio entre ambas, se define la razón “pico de la señal / ruido” o PSNR (peak signal to noise ratio) como:

$$\text{PSNR} = 10 \log \left[\frac{255^2}{\text{MSE}} \right] \text{dB}$$

que está en escala logarítmica. Cuando el error cuadrático medio decrece, aumenta el PSNR.

2.3 Análisis de multirresolución en una dimensión :

Un análisis de multirresolución consiste en una secuencia de subespacios anidados

$$.. \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset ..$$

cuya unión es densa en $L^2(\mathbb{R})$ y cuya intersección es la función nula.

El subespacio V_0 es generado por las traslaciones enteras de una función $\Phi(x)$, llamada *función de escala*, y los demás subespacios V_j son generados por las traslaciones enteras de una versión dilatada o contraída de la misma $\Phi(x)$.

$$V_j = \overline{\text{gen}\{\Phi(2^j x - k)\}_k}$$

De la inclusión $V_0 \subset V_1$ se deduce que $\Phi(x)$, que es base de V_0 , debe poder expresarse como combinación de las bases de V_1 . Entonces deben existir constantes h_k tal que

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^N h_k \Phi(2x - k). \quad (2.1)$$

La ecuación 2.1 es llamada ecuación de dilatación o de refinamiento.

Consideramos los casos en que el conjunto

$$\{\Phi(x - k)\}_k$$

es ortonormal. Para cada entero j , W_j es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Los subespacios W_j son generados por las traslaciones enteras de versiones dilatadas de una función $\Psi(x)$ llamada *wavelet* (ondelette, ondita, ondícula):

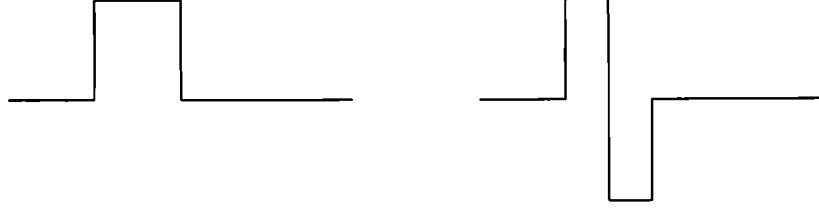
$$W_j = \overline{\text{gen}\{\Psi(2^j x - k)\}_k}.$$

De la inclusión $W_0 \subset V_1$ se deduce que $\Psi(x)$, que es base de W_0 , debe poder expresarse como combinación de las bases de V_1 . Entonces deben existir constantes g_k tal que

$$\Psi(x) = \sum_k g_k \Phi(2x - k). \quad (2.2)$$

conocida como ecuación de la wavelet. Una vez conocidos los coeficientes h_k de la función de escala $\Phi(x)$, la wavelet asociada $\Psi(x)$ se puede hallar directamente, es decir se pueden calcular los coeficientes g_k de la ecuación de la wavelet como

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}. \quad (2.3)$$

Figura 2.2: Haar: Φ función de escala, y Ψ wavelet.

Los coeficientes h_k determinan la función de escala, salvo multiplicaciones por constantes. En general no se tiene una forma analítica para $\Phi(x)$, solo se conocen sus coeficientes: con ellos se puede obtener un gráfico la función de escala. En las figuras 2.2, 2.3 y 2.4 se observan ejemplos de funciones de escala y su wavelet asociada: de Haar (figura 2.2) y de Daubechies 4, llamada así porque tiene 4 coeficientes h_k en la ecuación de dilatación (figura 2.3), y Symmlet 8 (figura 2.4), de 8 coeficientes.

En la figura 2.5 se observan varias funciones $\Psi(2^j x - k)$. – de la wavelet Symmlet 8– con diferentes escalas y traslaciones enteras, que son bases de los subespacios W_j .

Nota 2.9. Si una función de escala $\Phi(x)$ verifica la ecuación de dilatación 2.1, (se dice que $\Phi(x)$ es solución de la ecuación 2.1) entonces cualquier múltiplo de $\Phi(x)$ también verifica la ecuación. Se normaliza la solución agregando la condición $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = 1$.

Nota 2.10. En este trabajo nos ocupamos exclusivamente de wavelets ortogonales; sin embargo, existe otro tipo de wavelets, las biortogonales.

2.4 Procesamiento de señales

En aplicaciones prácticas tales como el procesamiento de señales, el espacio V_0 representa a la función $f_0(x)$ asociada a la señal original en su nivel de resolución más alto. Las sucesivas proyecciones $f_{-1}(x)$, $f_{-2}(x)$,... de $f_0(x)$ sobre los subespacios V_{-1} , V_{-2} , son representaciones de $f_0(x)$ de una resolución cada vez menor, mientras que los detalles o diferencias de una proyección a la siguiente son capturados por los espacios W_j , en la componente $r_j(x)$. Así la función asociada a la señal original se descompone en una aproximación burda de la misma y la suma de todos los componentes de detalle r_j en distintas escalas.

Llamamos $c^{(0)}$ a la señal original, y $f_0(x)$ es su función asociada, $f_0 \in V_0$. Si se descompone a $f_0(x)$ en la suma de sus proyecciones sobre V_{-1} y W_{-1} , se tiene

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{(0)} \Phi(x - k) \\ &= f_{-1}(x) + r_{-1}(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{(-1)} \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi(2^{-1}x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{(-1)} \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi(2^{-1}x - k). \end{aligned}$$

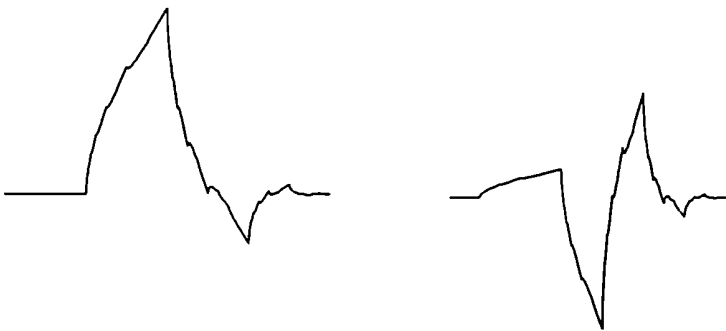


Figura 2.3: Daubechies 4: $\Phi(x)$: funcion de escala, y $\Psi(x)$: wavelet

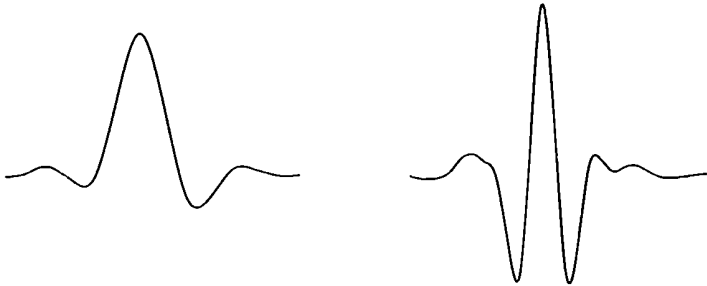


Figura 2.4: Symmlet 8: función de escala y wavelet.

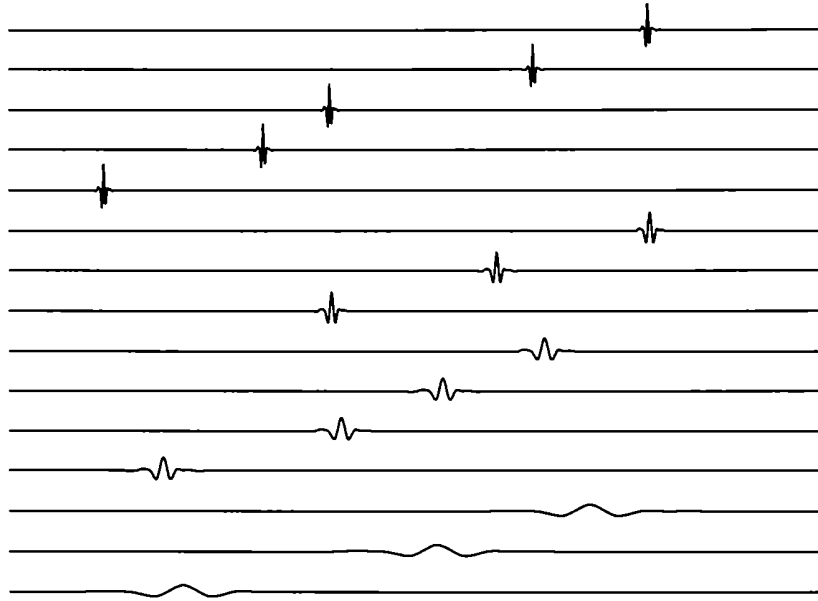


Figura 2.5: Varias escalas y traslaciones de la Symmlet 8

La función $f_{-1}(x) \in V_{-1}$ es una versión más suave de la función original, tiene menor resolución, y sus coeficientes $c_k^{(-1)}$ son llamados *coeficientes de aproximación*. La función $r_{-1}(x) \in W_{-1}$ contiene los detalles de $f_0(x)$ que son omitidos en $f_{-1}(x)$, y sus coeficientes $d_k^{(-1)}$ son llamados *coeficientes de detalle*.

En general se tiene

$$f = f_0 = f_{-1} + r_{-1} = f_{-2} + r_{-2} + r_{-1} = \dots = f_{-L} + \sum_{j=-L+1}^{-1} r_j,$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_k c_k^{(-L)} \Phi_{-L,k}(x)}_{f_{-L}(x) \in V_{-L}} + \sum_{j=-L}^{-1} \underbrace{\sum_k d_k^{(j)} \Psi_{j,k}(x)}_{r_j(x) \in W_j}, \quad (2.4)$$

donde

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Phi(2^j x - k) ; \Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k).$$

Los coeficientes de aproximación $\{c_k^{(j)}\}$ son los coeficientes de las proyecciones $f_j(x)$ en la base $\{\Phi_{j,k}(x)\}$, y los coeficientes de detalle $\{d_k^{(j)}\}$ son los coeficientes de las diferencias $r_j(x)$ en la base $\{\Psi_{j,k}(x)\}$.

Como ejemplo del procesamiento de una señal original con la wavelet Symmlet 8, se tienen las figuras 2.6 a 2.7. En 2.6 (a) está la función f_0 que corresponde a la señal original. Luego en el lado izquierdo

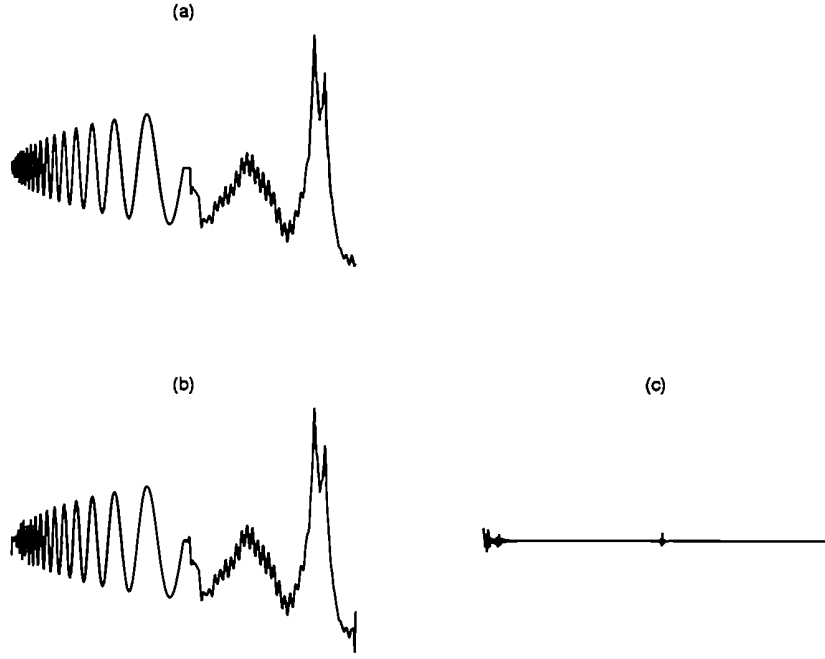


Figura 2.6: (a) $f(x) = f_0(x)$ (b) $f_{-1}(x)$ proyección de f sobre V_{-1} (c) $r_{-1}(x)$ proyección de f sobre W_{-1} .

de las 3 figuras, se observan las funciones f_j , con $j = -1, -2$, que son versiones cada vez más suavizadas de f_0 , y que corresponden a sucesivas proyecciones de f_0 sobre los espacios V_j . Y en el lado derecho se observan las funciones r_j , con $j = -1, -2$, el detalle omitido en f_j .

En la figura 2.9 se observa: (a) la función f_0 (b) los coeficientes de la transformada y (c) las componentes de la transformada wavelet. Al procesar una señal, lo que se obtiene son los coeficientes de la señal en la nueva base.

Los gráficos de wavelets y el procesamiento de señales con wavelets en una dimensión fueron realizados con el paquete de rutinas Wavelab, de D. Donoho, que puede obtenerse de

<http://www-stat.stanford.edu/~wavelab>.

La obtención de los coeficientes de aproximación $\{c_k^{(-1)}\}$ y de detalle $\{d_k^{(-1)}\}$ a partir de los coeficientes de la señal original $\{c_k^{(0)}\}$ constituye un paso de la transformada wavelet. Una de las ventajas más sobresalientes de esta transformada es que es una transformada rápida, y se puede demostrar que

$$c_k^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j h_{j-2k} c_j^{(0)} \quad (2.5)$$

$$d_k^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j g_{j-2k} c_j^{(0)}. \quad (2.6)$$

De la fórmulas de análisis (2.5) y (2.6) se deduce que los coeficientes de aproximación $c^{(-1)}$ se pueden expresar como una convolución de la señal original $c^{(0)}$ con el filtro

$$\frac{1}{\sqrt{2}} h' = \frac{1}{\sqrt{2}} [\dots \quad h_3 \quad h_2 \quad h_1 \quad h_0]$$

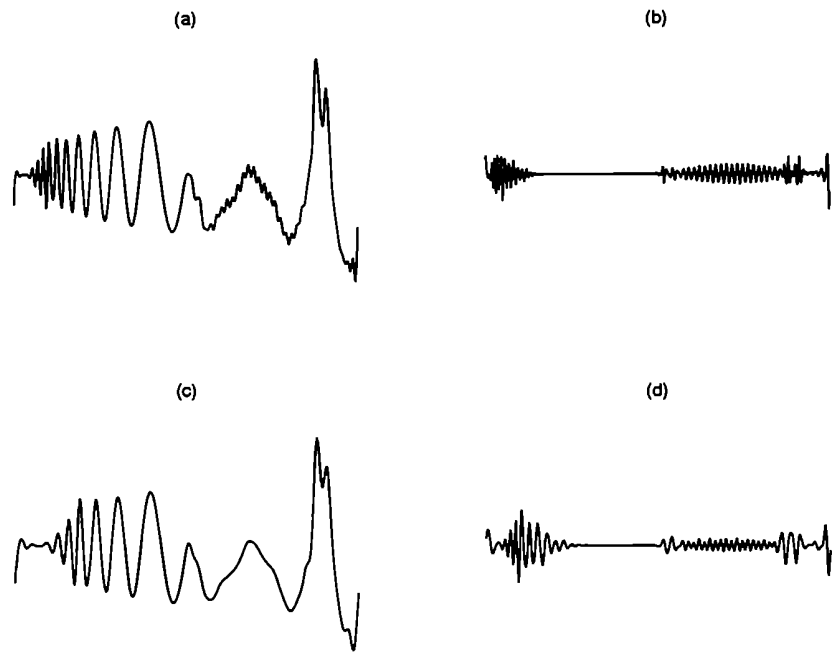


Figura 2.7: (a) $f_{-2}(x)$ (b) $r_{-2}(x)$ (c) $f_{-3}(x)$ (d) $r_{-3}(x)$

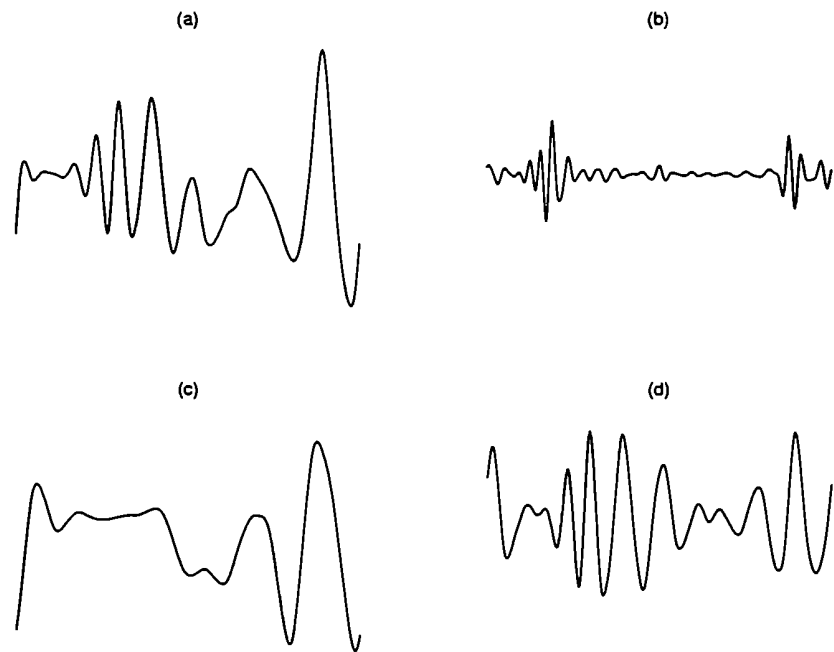


Figura 2.8: (a) $f_{-4}(x)$ (b) $r_{-4}(x)$ (c) $f_{-5}(x)$ (d) $r_{-5}(x)$

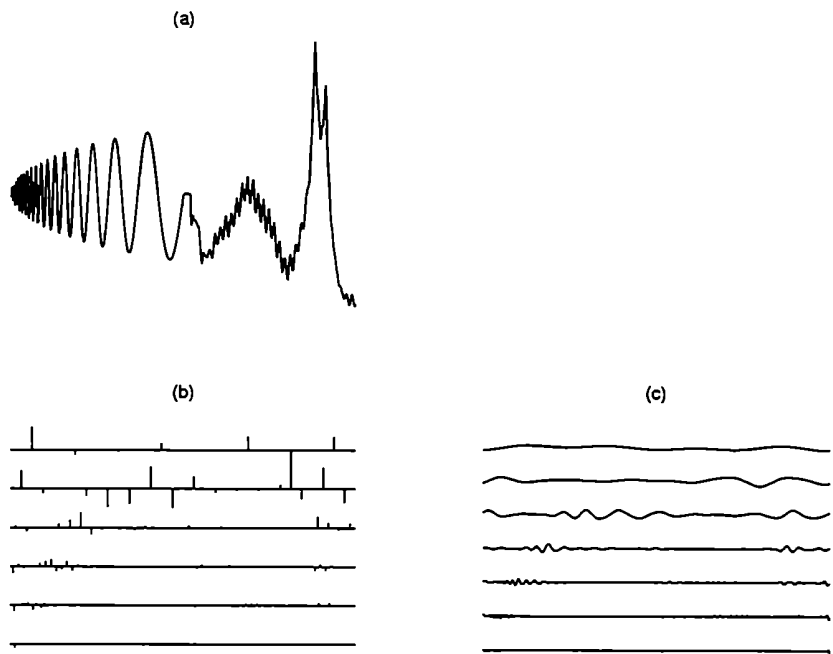


Figura 2.9: (a) $f_0(x)$ (b) por filas: $c^{(-L)}, d^{(-L)}, \dots, d^{(-2)}, d^{(-1)}$ (c) por filas: $f_{-L}, r_{-L}, \dots, r_{-2}, r_{-1}$.

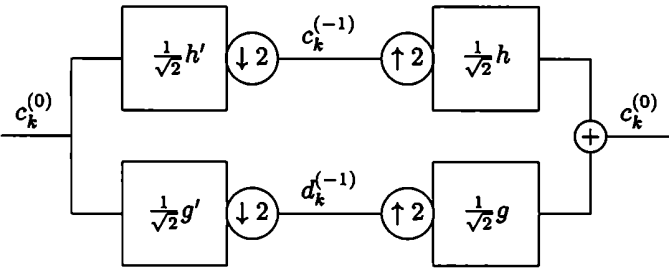


Figura 2.10: Esquema de análisis-síntesis en dimensión 1

seguida de un submuestreo, mientras que los coeficientes de detalle $d^{(-1)}$ se obtienen de una convolución de $c^{(0)}$ con el filtro

$$\frac{1}{\sqrt{2}}g' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cdots & g_{-2} & g_{-1} & g_0 & g_1 \end{bmatrix}$$

seguido de un submuestreo:

$$c^{(-1)} = \left(c^{(0)} * \frac{h'}{\sqrt{2}} \right) \downarrow 2 \quad (2.7)$$

$$d^{(-1)} = \left(c^{(0)} * \frac{g'}{\sqrt{2}} \right) \downarrow 2 \quad (2.8)$$

Esto se indica en el lado izquierdo del esquema (2.10).

Se repite este proceso sobre $c^{(-1)}$, obteniéndose $c^{(-2)}$ y $d^{(-2)}$. Se realizan la cantidad deseada de pasos. Las fórmulas 2.7, 2.8, también permiten calcular $c_k^{(-2)}$ y $d_k^{(-2)}$ a partir de $c_k^{(-1)}$, así como $c_k^{(-3)}$ y $d_k^{(-3)}$ a partir de $c_k^{(-2)}$, etc..

Por ejemplo, si la señal original $\{c_k^{(0)}\}$ es de 8 coeficientes, el cálculo

$$\begin{bmatrix} c_0^{(0)} & c_1^{(0)} & c_2^{(0)} & c_3^{(0)} & c_4^{(0)} & c_5^{(0)} & c_6^{(0)} & c_7^{(0)} \end{bmatrix} \rightarrow \\ \begin{bmatrix} c_0^{(-1)} & c_1^{(-1)} & c_2^{(-1)} & c_3^{(-1)} & d_0^{(-1)} & d_1^{(-1)} & d_2^{(-1)} & d_3^{(-1)} \end{bmatrix}$$

constituye un paso de la transformada wavelet. Y, bajando un nivel más:

$$\begin{bmatrix} c_0^{(-1)} & c_1^{(-1)} & c_2^{(-1)} & c_3^{(-1)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_0^{(-2)} & c_1^{(-2)} & d_0^{(-2)} & d_1^{(-2)} \end{bmatrix}$$

se tienen 2 pasos de la transformada wavelet (que a también se denomina la transformada wavelet bajando 2 niveles):

$$\begin{bmatrix} c_0^{(0)} & c_1^{(0)} & c_2^{(0)} & c_3^{(0)} & c_4^{(0)} & c_5^{(0)} & c_6^{(0)} & c_7^{(0)} \end{bmatrix} \rightarrow \\ \begin{bmatrix} c_0^{(-2)} & c_1^{(-2)} & d_0^{(-2)} & d_1^{(-2)} & d_0^{(-1)} & d_1^{(-1)} & d_2^{(-1)} & d_3^{(-1)} \end{bmatrix}$$

La transformada wavelet es un cambio de base y tiene inversa. Para reconstruir la señal inicial a partir de los coeficientes $c^{(-1)}$ y $d^{(-1)}$ está la fórmula de síntesis:

$$c_k^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{k-2j} c_j^{(-1)} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{k-2j} d_j^{(-1)} \right] \quad (2.9)$$

que corresponde a la parte derecha del esquema (2.10): sobremuestreo, filtrado y suma:

$$c^{(0)} = \left[\left(c^{(-1)} \uparrow 2 \right) * \frac{h}{\sqrt{2}} \right] + \left[\left(d^{(-1)} \uparrow 2 \right) * \frac{g}{\sqrt{2}} \right].$$

En el caso de Haar, el filtro h es

$$h = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

En el caso Daubechies 4, el filtro h es:

$$h = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{3+\sqrt{3}}{4} & \frac{3-\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

A partir de h se obtiene g (ver 2.3):

$$g = \begin{bmatrix} g_{-2} & g_{-1} & g_0 & g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \end{bmatrix}$$

y entonces los filtros h' y g' son:

$$h' = \begin{bmatrix} h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \quad y \quad g' = \begin{bmatrix} g_1 & g_0 & g_{-1} & g_{-2} \end{bmatrix}$$

Nota 2.11. Si se transforma una señal con las fórmulas 2.7 y 2.8, en los bordes se pueden producir distorsiones, a causa de las convoluciones “truncas”. Para evitar esta situación, se periodiza la señal en forma cíclica antes de transformarla. De igual manera, antes de calcular la transformada inversa de un vector de coeficientes, se los periodiza en forma cíclica. (Existe otro tipo de periodización, la periodización simétrica, que se puede realizar cuando los filtros son simétricos o antisimétricos. Pero nos hemos restringido a las wavelets ortogonales, y éstas no pueden tener filtros simétricos, salvo en el caso de Haar.)

Nota 2.12. Al procesar una señal se obtienen las proyecciones en los diferentes subespacios V_j, W_j de una función $f(x)$ asociada a la señal original. Lo ideal sería que la función $f(x)$ fuera tal que sus muestras coincidieran con la señal original. En ese caso, la señal original sería $f(x_k)$, y para iniciar el procesamiento de la señal, habría que calcular $c_k^{(0)}$, los coeficientes de la proyección de $f(x)$ en V_0 . Para esto existen técnicas de prefiltrado o convolución inversa, en el caso de splines biortogonales. También pueden estimarse los $c_k^{(0)}$ con integración numérica. Más adelante se darán los enunciados de ciertos teoremas, según los cuales, bajo ciertas condiciones, si el muestreo es suficientemente fino, entonces $f(x_k) \approx c_k^{(0)}$.

Nota 2.13. Supongamos que $f \approx f_J \in V_J, (J \geq 1)$: entonces la función está discretizada con paso pequeño y pertenece a un subespacio de resolución más fina. Corresponde entonces tomar como la proyección inicial de $f(x)$ a $f_J \in V_J$

$$P_J(f)(x) = f_J(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{(J)} \Phi_{J,k}(x),$$

donde $c_k^{(J)} = c_k^{(J)}(f) = \langle f, \Phi_{J,k} \rangle$. Con el cambio de variables $y = 2^J x$, definimos $g(y) = f(2^{-J}y)$. Si ahora proyectamos $g(y)$ sobre V_0 , se obtiene

$$P_0(g)(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{(0)} \Phi(y - k)$$

donde

$$c_k^{(0)} = c_k^{(0)}(g) = \langle g, \Phi_{0,k} \rangle = 2^{J/2} c_k^{(J)} = 2^{J/2} c_k^{(J)}(f). \quad (2.10)$$

Es decir, los coeficientes de la proyección de f en V_J son iguales (salvo una constante) a los coeficientes de la proyección de $f(2^{-J}y)$ en V_0 . No se pierde generalidad al asumir que el tratamiento de una señal comienza con su proyección en V_0 .

2.4.1 Formulación polifase

Las fórmulas de análisis 2.5 y 2.6 pueden escribirse de una manera equivalente sin realizar operaciones innecesarias, como el cálculo de una convolución de la cual se descartan coeficientes impares en el submuestreo. Para simplificar, llamaremos x a la señal original $c^{(0)}$, x_P a los valores pares de esta señal y x_I a los valores impares:

$$\begin{aligned} x_P &= x \downarrow 2 \\ x_I &= (x * \delta_{-1}) \downarrow 2 \\ x &= [x_P \uparrow 2] + [\delta_1 * (x_I \uparrow 2)]. \end{aligned}$$

Escribiendo esto en términos de la transformada Z , se tiene:

$$\begin{aligned} x_P(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_{2j} z^{-j} \\ x_I(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_{2j+1} z^{-j} \\ X(z) &= X_P(z^2) + z^{-1} X_I(z^2). \end{aligned}$$

Se hace exactamente la misma descomposición sobre los filtros. h_P son los coeficientes pares de h , y h_I son los impares:

$$\begin{aligned} h_P &= h \downarrow 2 \\ h_I &= (h * \delta_{-1}) \downarrow 2 \\ h &= [h_P \uparrow 2] + [\delta_1 * (h_I \uparrow 2)]. \end{aligned}$$

Y en términos de la transformada Z , se tiene:

$$\begin{aligned} h_P(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{2j} z^{-j} \\ h_I(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{2j+1} z^{-j} \\ H(z) &= H_P(z^2) + z^{-1} H_I(z^2). \end{aligned}$$

Se puede ver que la transformada Z de $y_1 = (x * h') \downarrow 2$ es

$$Y_1(z) = X_P(z) H_P\left(\frac{1}{z}\right) + X_I(z) H_I\left(\frac{1}{z}\right), \quad (2.11)$$

y, análogamente, la transformada Z de $y_2 = (x * g') \downarrow 2$ es

$$Y_2(z) = X_P(z) G_P\left(\frac{1}{z}\right) + X_I(z) G_I\left(\frac{1}{z}\right). \quad (2.12)$$

Esto, en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_P\left(\frac{1}{z}\right) & H_I\left(\frac{1}{z}\right) \\ G_P\left(\frac{1}{z}\right) & G_I\left(\frac{1}{z}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P(z) \\ X_I(z) \end{bmatrix} = P_{H',G'} \begin{bmatrix} X_P(z) \\ X_I(z) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

En general, se define

$$P_{F,J} = \begin{bmatrix} F_P(z) & F_I(z) \\ J_P(z) & J_I(z) \end{bmatrix}$$

como la *matriz polifase* de los filtros F y J . Entonces, las ecuaciones 2.7 y 2.8 son equivalentes a

$$\begin{bmatrix} C^{(-1)}(z) \\ D^{(-1)}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_P(\frac{1}{z}) & H_I(\frac{1}{z}) \\ G_P(\frac{1}{z}) & G_I(\frac{1}{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_P^{(0)}(z) \\ C_I^{(0)}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} P_{H',G'} \begin{bmatrix} C_P^{(0)}(z) \\ C_I^{(0)}(z) \end{bmatrix}$$

y, en términos de convoluciones, a

$$\begin{aligned} c^{(-1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(c_P^{(0)} * h'_P) + (c_I^{(0)} * h'_I) \right] \\ d^{(-1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(c_P^{(0)} * g'_P) + (c_I^{(0)} * g'_I) \right] \end{aligned}$$

Estas últimas ecuaciones son computacionalmente más eficientes.

2.5 Propiedades de las wavelets:

2.5.1 Existencia de la función de escala

Forma Fourier de la ecuación de dilatación:

Si se transforma Fourier la ecuación de dilatación 2.1, resulta

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(w) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N h_k e^{-i w k / 2} \hat{\Phi}\left(\frac{w}{2}\right) = \tilde{H}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= \tilde{H}\left(\frac{w}{2}\right) \tilde{H}\left(\frac{w}{4}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{w}{4}\right) = \dots \\ &= \hat{\Phi}\left(\frac{w}{2^N}\right) \prod_{n=1}^N \tilde{H}\left(\frac{w}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $N \rightarrow \infty$, y usando que $\hat{\Phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = 1$, se obtiene

$$\hat{\Phi}(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \tilde{H}\left(\frac{w}{2^n}\right).$$

Para que est producto infinito sea convergente, es necesario que $\tilde{H}\left(\frac{w}{2^n}\right) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, o sea que debe ser $\tilde{H}(0) = 1$, y entonces $\hat{H}(0) = 2$.

La convergencia en L^2 está garantizada si $|\tilde{H}(w)| > a > 0$ para $|w| \leq \pi/2$ [4].

2.5.2 Ortogonalidad

Si la transformada wavelet es ortonormal, entonces la cuantización de los coeficientes para la compresión de datos es un proceso estable, es decir, a errores pequeños de cuantización le corresponden errores pequeños en la señal reconstruída. Si el conjunto

$$\{\Phi(x-j)\}_j \tag{2.14}$$

es ortonormal, entonces los coeficientes h_k verifican:

$$\sum_k h_k h_{k+2j} = 2\delta_{j,0} \quad \text{para cada } j \in \mathbb{Z}.$$

Si la función de escala y la wavelet son ortogonales, y para todo j vale

$$\langle \Phi(\cdot - j), \Psi(\cdot) \rangle = 0 \quad (2.15)$$

entonces los coeficientes h_k y g_k verifican:

$$\sum_k h_k g_{k+2j} = 0 \quad \text{para cada } j \in \mathbb{Z}.$$

Si el conjunto

$$\{\Psi(x - j)\}_j \quad (2.16)$$

es ortonormal, entonces los coeficientes g_k verifican:

$$\sum_k g_k g_{k+2j} = 2\delta_{j,0} \quad \text{para cada } j \in \mathbb{Z}.$$

Si se verifican las condiciones 2.14, 2.15 y 2.16 se dice que (Φ, Ψ) es un sistema ortonormal.

Nota 2.14. Se hablará indistintamente de un sistema ortonormal u ortogonal.

2.5.3 Soporte compacto (buena localización en el tiempo)

Si las familias $\{\Phi_{j,k}(x)\}_k$ y $\{\Psi_{j,k}(x)\}_k$ son ortonormales, los coeficientes de la transformada pueden calcularse como:

$$c_k^{(j)} = \int f(x) \Phi_{j,k}(x) dx ; \quad d_k^{(j)} = \int f(x) \Psi_{j,k}(x) dx$$

Como en general los valores de una señal discretizada no tienen correlación con los otros valores de la misma alejados en el tiempo o en el espacio, es deseable que las funciones de escala y las wavelets tengan soporte pequeño.

Nota 2.15. El soporte de la función de escala $\Phi(x)$, que verifica 2.1, es el intervalo $[0, N]$.

2.5.4 Aproximación polinomial

Supongamos que la función de escala verifica cierta propiedad: todos los polinomios de grado menor que 3 se pueden representar, en un intervalo dado, como combinación lineal de la función de escala y sus traslaciones enteras. Entonces estos polinomios pertenecen localmente al subespacio V_0 , y se puede ver que también pertenecen localmente a todos los V_j , con lo cual todos los coeficientes de detalle son 0. Por ejemplo,

$$\forall x \in [0, b], \quad x^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \Phi(x - k) \in V_0, \quad \alpha_k = c_k^{(0)},$$

con el cambio de variable $x = y/2$, se obtiene

$$\forall x \in [0, b], \quad x^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (4\sqrt{2}\alpha_k) \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{x}{2} - k\right) \in V_{-1}, \quad 4\sqrt{2}\alpha_k = c_k^{(-1)},$$

y como $\forall x \in [0, b]$, $x^2 = f_0(x) = f_{-1}(x)$, entonces $r_{-1}(x) = 0$ y $d_k^{(-1)} = 0$. Análogamente, $\forall x \in [0, b]$, $x^2 = f_j(x)$, y entonces $r_j(x) = 0$ y $d_k^{(j)} = 0$, para $j = -2, -3, \dots, -L$. Supongamos ahora que se

tiene una señal "suave", parecida a un polinomio de grado 2. Entonces los coeficientes de detalle serán muy pequeños. Al escribir a f como en (2.4), si los coeficientes $d_k^{(j)}$ son pequeños se los puede llevar a 0 aplicando un umbral, y una cadena larga de ceros se puede comprimir fácilmente. Por otro lado, como casi toda la información de la señal está concentrada en los coeficientes de aproximación $c_k^{(-L)}$, el error cometido será muy pequeño, y la señal reconstruida será de buena calidad. En resumen, para lograr la compresión de una señal es importante que la función de escala pueda reproducir polinomios. Cuanto mayor es el grado de los polinomios que pueda reproducir, más señales suaves se podrán comprimir.

Definición 2.1. Decimos que $\Phi(x)$ tiene *aproximación polinomial de orden s* (*accuracy s*) si cualquier polinomio $p(x)$ de grado $< s$ puede escribirse como

$$p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \Phi(x - k). \quad (2.17)$$

Si $\Phi(x)$ tiene soporte compacto, esto es equivalente a que se cumplan:

$$\sum_k h_k = 2, \quad \sum_k (-1)^k k^p h_k = 0, \quad p = 0, 1, \dots, s-1.$$

Para hacer más adelante una comparación de ésta con otras fórmulas que daremos a conocer, re-escribimos la fórmula anterior como

$$\sum_{k \in \Gamma_i} h_k = 1, \quad \sum_{k \in \Gamma_i} k^p h_k = v_p, \quad p = 1, \dots, s-1 \quad i = 0, 1,$$

donde v_p son ciertas constantes, $\Gamma_0 = 2\mathbb{Z}$ es el conjunto de todos los enteros pares, $\Gamma_1 = 2\mathbb{Z} + 1$ es el conjunto de todos los enteros impares, y $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \mathbb{Z}$.

Nota 2.16. La aproximación de polinomios por combinaciones lineales de $\Phi(x - k)$ es un fenómeno local. Si en la ecuación 2.17, $x \in [p, p+1)$, ($p \in \mathbb{Z}$) entonces existen N valores distintos de k para los cuales

$$\text{supp}(\Phi(x - k)) \cap [p, p+1) \neq \emptyset,$$

y entonces existen N valores α_k tal que vale la ecuación. Si x cambia de intervalo, entonces cambia el conjunto de constantes α_k .

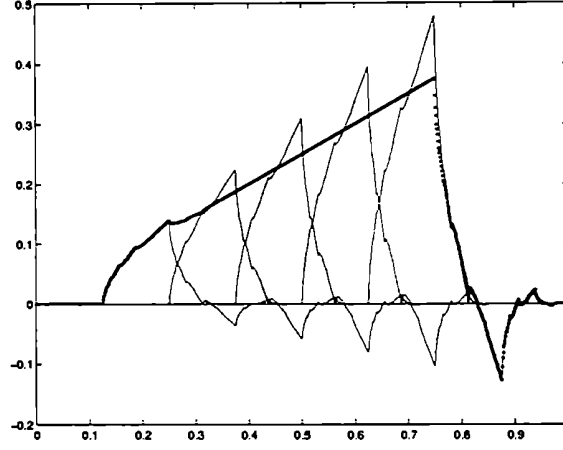
Existen varios ejemplos conocidos de funciones de escala ortogonales de la aproximación polinómica deseada- ver [1]. El inconveniente es que cuanto mayor es el orden de aproximación polinomial, mayor es la cantidad de coeficientes h_k y mayor el soporte de $\Phi(x)$, y hay que hacer un balance entre las 2 propiedades buscadas.

La función de escala de Haar tiene aproximación polinomial de orden 1, es decir, representa localmente a las funciones constantes. Y la función de escala Daubechies 4 tiene aproximación polinomial de orden 2, es decir, representa localmente a las funciones constantes y a las rectas - en la figura 2.11 se observa la aproximación del polinomio $p(x) = x/2$ por traslaciones enteras de la función de escala de Daubechies 4. La suma - indicada por el trazo recto en el centro - no es una recta en los bordes porque se tomó una combinación lineal finita de funciones $\Phi(x - k)$.

La función de escala Symmlet 8 tiene aproximación polinomial de orden 4, es decir, que aproxima polinomios de grado menor o igual a 3.

2.5.5 Buena localización en las frecuencias

Al realizar un paso de la transformada wavelet, se filtra la señal con los filtros h' y g' (por una constante). Si los filtros son finitos, son finitos h y g , y tanto la función de escala como la wavelet tienen soporte

Figura 2.11: Aproximación de $x/2$ con funciones $\Phi(x - k)$ Daubechies 4.

compacto. Pero sus transformadas Fourier no pueden tener soporte compacto. O sea que la localización en frecuencias nunca será perfecta. Sin embargo, cuanto mejor los filtros h' y g' separen las bajas frecuencias de las altas frecuencias de la señal – ver esquema 2.10 – mejor localizada en frecuencias será la transformada wavelet. Esto sucederá si h' es un buen filtro pasa-bajos, es decir, su respuesta en frecuencias es nula en valores cercanos a π , y si g' es un buen filtro pasa-altos, es decir, su respuesta en frecuencias es nula en valores cercanos a 0.

Si h' es un filtro pasa-bajos, entonces su respuesta en frecuencias $\hat{H}(-w)$ debe ser 0 en $w = \pi$. Es decir, $\hat{H}(-\pi) = 0$. Y como $\hat{H}(w)$ es periódica con período 2π , entonces $\hat{H}(\pi) = 0$, y la transformada Z cumple $H(-1) = 0$. Si $\hat{H}(w)$ tiene una raíz doble en $w = \pi$, hay un mayor decaimiento de $\hat{H}(w)$ en π .

Si $\hat{H}(w)$ tiene una raíz de orden m en $w = \pi$, vale

$$\hat{H}(\pi) = \frac{\partial \hat{H}}{\partial w}(\pi) = \dots = \frac{\partial^{(m-1)} \hat{H}}{\partial w^{(m-1)}}(\pi) = 0.$$

De manera equivalente

$$H(-1) = \frac{\partial H}{\partial z}(-1) = \dots = \frac{\partial^{(m-1)} H}{\partial z^{(m-1)}}(-1) = 0,$$

y $H(z)$ se puede escribir como

$$H(z) = (1 + z^{-1})^m Q(z),$$

lo cual implica que.

$$\hat{H}(w) = (1 + e^{-iw})^m \hat{Q}(w).$$

Cuanto mayor es m , más “achata” será la respuesta en frecuencias de h' cerca de $w = \pi$, y mejor filtro pasa-bajos será h' .

Análogamente, si g' es un filtro pasa-altos, entonces $\hat{G}(0) = G(1) = 0$. Si $\hat{G}(w)$ tiene una raíz de

orden m en $w = 0$, valen

$$\begin{aligned}\widehat{G}(0) &= \frac{\partial \widehat{G}}{\partial w}(0) = \cdots = \frac{\partial^{(m-1)} \widehat{G}}{\partial w^{(m-1)}}(0) = 0, \\ G(1) &= \frac{\partial G}{\partial z}(1) = \cdots = \frac{\partial^{(m-1)} G}{\partial z^{(m-1)}}(1) = 0,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}G(z) &= (1 - z^{-1})^m Q(z), \\ \widehat{G}(w) &= (1 - e^{-iw})^m \widehat{Q}(w).\end{aligned}$$

Cuanto mayor sea m , más “achatada” será la respuesta en frecuencias de g' cerca de $w = 0$, y mejor filtro pasa-altos será g' .

2.6 Propiedades: sus relaciones y consecuencias

Teorema 2.1. Sea (Φ, Ψ) un sistema ortonormal, $c_k^{(0)}$ son los coeficientes de la señal original, y se calcula su transformada wavelet de L niveles, obteniéndose los coeficientes $c_k^{(-L)}, d_k^{(-L)}, \dots, d_k^{(-1)}$, tales que

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_k c_k^{(0)} \Phi(x - k) \\ &= \sum_k c_k^{(-L)} \Phi_{-L,k}(x) + \sum_{j=-L+1}^{-1} \sum_k d_k^{(j)} \Psi_{j,k}(x).\end{aligned}$$

Si se cuantizan los coeficientes, aplicándoles una función de cuantización $Q(x)$ —como por ejemplo el redondo, o el pasar los coeficientes por un umbral, quedando los más grandes— entonces la señal reconstruida $\tilde{c}_k^{(0)}$, que se obtiene antitransformando, tiene un error cuya norma cuadrática es igual a la de los errores de cuantización:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \sum_k Q(c_k^{(-L)}) \Phi_{-L,k}(x) + \sum_{j=-L+1}^{-1} \sum_k Q(d_k^{(j)}) \Psi_{j,k}(x) \\ &= \sum_k \tilde{c}_k^{(0)} \Phi(x - k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|c^{(0)} - \tilde{c}^{(0)}\|_2 &= \|f - \tilde{f}\|_2 \\ &= \left(\sum_k \left(c_k^{(-L)} - Q(c_k^{(-L)}) \right)^2 + \sum_{j=-L+1}^{-1} \sum_k \left(d_k^{(j)} - Q(d_k^{(j)}) \right)^2 \right)^{1/2}\end{aligned}$$

Esto indica que la cuantización es un proceso estable, cuando la transformada es ortonormal.

Teorema 2.2. Si Φ es m veces derivable con continuidad, son equivalentes:

- $H(z)$ tiene un raíz de orden m en $z = -1$, es decir, $H(z) = (1 + z^{-1})^m Q(z)$, o, en forma equivalente, $\widehat{H}(w) = (1 + e^{-iw})^m \widehat{Q}(w)$,

- $H(-1) = \frac{\partial H}{\partial z}(-1) = \dots = \frac{\partial^{(m-1)} H}{\partial z^{(m-1)}}(-1) = 0$,
- $G(z)$ tiene una raíz de orden m en $z = 1$, es decir, $G(z) = (1 - z^{-1})^m Q(z)$, o en forma equivalente $\widehat{G}(w) = (1 - e^{-iw})^m \widehat{Q}(w)$,
- $G(1) = \frac{\partial G}{\partial z}(1) = \dots = \frac{\partial^{(m-1)} G}{\partial z^{(m-1)}}(1) = 0$,
- $\sum_{k \in \Gamma_i} k^p h_k = v_p \quad i = 0, 1, \quad p = 0, \dots, m-1$,
- $\sum_{k \in \Gamma_i} k^p g_k = 0 \quad i = 0, 1, \quad p = 0, \dots, m-1$,
- Φ tiene aproximación polinomial de orden m ,
- Ψ tiene m momentos nulos,
- si $c_k^{(0)} = p(x_k)$ es un polinomio de grado $r < m$ discretizado en x_k , entonces los coeficientes de aproximación de la transformada wavelet $c_k^{(-1)}$ son otro polinomio de grado r discretizado en x_{2k} , y los coeficientes de detalle $d_k^{(-1)}$ son nulos. (En este caso, decimos que la rama pasa-bajos de la transformada wavelet preserva los polinomios discretizados).

Teorema 2.3. Salvo el caso de Haar, no existen funciones de escala que sean simultáneamente simétricas y ortogonales.

Para los dos teoremas que siguen, ver [5] y las referencias que allí se indican.

Teorema 2.4. Si f tiene derivadas hasta el orden m que son Lipschitz 1, f tiene soporte compacto, (Φ, Ψ) es un sistema ortonormal, y Ψ tiene m momentos nulos, entonces la diferencia entre f y su proyección en V_J se puede acotar de la siguiente manera:

$$\|f - f_J\|_2 \leq K 2^{-J(m+1)}.$$

Teorema 2.5. Si f tiene derivadas hasta el orden m que son Lipschitz 1, f tiene soporte compacto, (Φ, Ψ) es un sistema ortonormal, $\int \Phi(x) dx = 1$, y $\int_{-\infty}^{\infty} x^r \Phi(x) dx = 0$ para $r = 1, \dots, m-1$, entonces vale para todo J

$$\left\| c_k^{(J)} - 2^{-J/2} f\left(\frac{\cdot}{2^J}\right) \right\|_2 = \left[\sum_{k=0}^{2^J-1} \left(c_k^{(J)} - 2^{-J/2} f\left(\frac{k}{2^J}\right) \right)^2 \right]^{1/2} \leq C 2^{-J(m+1)},$$

donde

$$c_k^{(J)} = \int f(x) \Phi_{J,k}(x) dx.$$

Coifman sugirió construir Φ y Ψ de manera de que cumplieran con las hipótesis de los 2 teoremas anteriores: de allí surgieron las Coiflets.

Wavelet	figura	aprox. pol.	largo	ρ	s
Haar	2.2	1	2	–	–
Daubechies 4	2.3	2	4	0.683	0.55
Coiflet 2	2.12	4	12	0.5	1
Symmlet 8	2.4	8	16	0.5	1

Tabla 2.1: Ejemplos de funciones de escala y wavelets

Lema 2.1. .

En las condiciones del teorema anterior, si se multiplica todo por $2^{J/2}$, y se aplica 2.10, se obtiene

$$\left\| c^{(0)} - f\left(\frac{\cdot}{2^J}\right) \right\|_2 \leq C \, 2^{-J(m+1/2)},$$

donde $g(y) = f(2^{-J}y)$ y $c_k^{(0)} = \int g(x) \, \Phi_{0,k}(x) \, dx$. Esto indica que si el muestreo es suficientemente fino, entonces $c_k^{(0)} \approx f\left(\frac{k}{2^J}\right)$. El error que se comete, al tomar a los coeficientes $c_k^{(0)}$ como los valores de la señal original, es pequeño.

2.7 Ejemplos

En la tabla 2.1 se listan algunas wavelets ortonormales, se da el orden de aproximación polinomial, el largo del filtro asociado h , una estimación del radio espectral conjunto ρ , y una estimación del exponente de Hölder s . El exponente de Hölder da una medida de la regularidad de las funciones: cuanto mayor es el exponente, más suave es la función. Tanto la función de escala como la wavelet tienen el mismo exponente Hölder. Para obtener s se estima el radio espectral conjunto ρ . En la sección 2.8 se explicará el procedimiento.

La wavelet Coiflet 2 – de Coifman– tiene 4 momentos nulos, y su función de escala cumple

$$\int \Phi(x) dx = 1,$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r \Phi(x) \, dx = 0 \text{ para } r = 1, ..3$$

2.7.1 Algoritmo cascada

Este algoritmo permite graficar las funciones de escala y las wavelets, para las cuales en general no se tiene expresión analítica.

Algoritmo 2.1. Gráfico de la función de escala:

Supongamos que $\int \Phi(x) dx = 1$, y $\int_{-\infty}^{\infty} x^r \Phi(x) \, dx = 0$ para $r = 1, ..m - 1$. El algoritmo converge aunque $\Phi(x)$ no tenga momentos nulos.

Sea $\chi(x)$ la función característica del intervalo $[0,1)$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \, ,$$

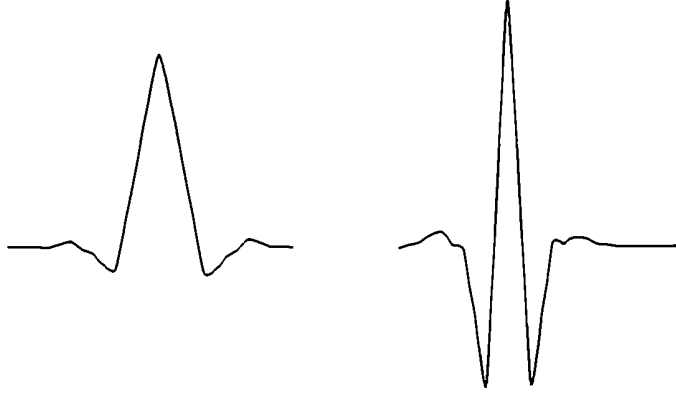


Figura 2.12: Coiflet 2: Función de escala y wavelet

y sea $a_0^{(0)} = 1$. Se inicia el algoritmo con la función

$$\Phi^{(0)}(x) = a_0^{(0)} \chi(x),$$

y se itera sobre la ecuación de dilatación 2.1 para obtener sucesivas aproximaciones $\Phi^{(1)} \Phi^{(2)} \dots \Phi^{(p)} \dots$ de Φ . Para $p = 1$ se obtiene

$$\Phi^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^N h_k \Phi^{(0)}(2x - k) = \sum_{k=0}^N a_k^{(1)} \chi(2x - k),$$

con $a_k^{(1)} = h_k$. Si se sigue otro paso más, se tiene

$$\Phi^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^N h_k \Phi^{(1)}(2x - k) = \sum_{k=0}^N a_k^{(2)} \chi(4x - k),$$

donde

$$a_k^{(2)} = \sum_{j=0}^N h_j a_{k-2j}^{(1)},$$

es decir

$$a^{(2)} = a^{(1)} * (h \uparrow 2).$$

Y en general,

$$\Phi^{(p+1)}(x) = \sum_{k=0}^N h_k \Phi^{(p)}(2x - k) = \sum_{k=0}^N a_k^{(p+1)} \chi(2^{p+1}x - k),$$

donde

$$a^{(p+1)} = a^{(p)} * (h \uparrow 2^p).$$

Así, se calculan coeficientes de las sucesivas aproximaciones $\Phi^{(p)}$ que corresponden a una base $\chi(2^p x - k)$ de soporte cada vez más pequeño. Veremos que las aproximaciones $\Phi^{(p)}$ convergen a Φ .

Los coeficientes $a^{(p)}$ de las sucesivas aproximaciones $\Phi^{(p)}$ para $p = 1, 2, 3, \dots$ son

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= h = (a^{(0)} \uparrow 2) * h, \\ a^{(2)} &= h * (h \uparrow 2) = (h \uparrow 2) * h = (a^{(1)} \uparrow 2) * h, \\ a^{(3)} &= h * (h \uparrow 2) * (h \uparrow 2^2) = [(h \uparrow 2) * h] \uparrow 2 * h = (a^{(2)} \uparrow 2) * h. \end{aligned}$$

Comparando con el esquema 2.10, se ve que las expresiones de la derecha corresponden, salvo constantes, a calcular los distintos pasos de la transformada inversa de un vector que tiene un 1 como primer elemento y ceros en todas las posiciones restantes, que corresponden a los coeficientes de detalle:

$$\begin{bmatrix} c_0^{(-p)} & \dots & c_{2^{n-p}-1}^{(-p)} & d_0^{(-p)} & \dots & d_{2^{n-p}-1}^{(-p)} & \dots & d_0^{(-1)} & \dots & d_{2^{n-1}-1}^{(-1)} \end{bmatrix} \\ = [1 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

$$\text{Vector inicial} \begin{cases} c_0^{(-p)} = 1 \\ c_k^{(-p)} = 0 & k = 1, \dots, 2^{n-p} - 1 \\ d_k^{(j)} = 0, & j = -p, \dots, -1, \\ & k = 0, \dots, 2^{n+j} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k c_k^{(-p)} \Phi_{-p,k}(x) + \sum_{j=-p}^{-1} \sum_k d_k^{(j)} \Psi_{j,k}(x) \\ &= \Phi_{-p,0}(x) = 2^{-p/2} \Phi(2^{-p}x) \quad \text{función asociada a los valores iniciales.} \end{aligned}$$

Sucesivos pasos de la transformada inversa dan –recordar que los detalles de todos los niveles son 0 –:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k c_k^{(-(p-1))} \Phi_{-(p-1),k}(x), \\ c^{(-(p-1))} &= (c^{(-p)} \uparrow 2) * \frac{h}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{a^{(1)}}{\sqrt{2}} \quad \text{antitransformada 1 paso.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k c_k^{(-(p-2))} \Phi_{-(p-2),k}(x), \\ c^{(-(p-2))} &= (c^{(-(p-1))} \uparrow 2) * \frac{h}{\sqrt{2}} \\ &= \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \uparrow 2 \right) * \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{a^{(2)}}{2} \quad \text{antitransformada 2 pasos.} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_k c_k^{(0)} \Phi(x - k),$$

$$c^{(0)} = \left(c^{(-1)} \uparrow 2 \right) * \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{a^{(p)}}{2^{p/2}} \text{ antitransformada } p \text{ pasos.}$$

En virtud del lema 2.1

$$\left\| c^{(0)} - 2^{-p/2} \Phi \left(\frac{\cdot}{2^p} \right) \right\|_2 \leq C 2^{-p(m+1/2)},$$

o sea, si p es suficientemente grande,

$$2^{-p/2} \Phi \left(\frac{k}{2^p} \right) \approx c_k^{(0)} = \frac{a_k^{(p)}}{2^{p/2}},$$

$$\Phi \left(\frac{k}{2^p} \right) \approx a_k^{(p)}.$$

Así se obtienen valores que corresponden aproximadamente a la función de escala discretizada. En general, con 10 iteraciones alcanza para tener un buen gráfico de la función de escala.

Nota 2.17. Es conveniente tomar un vector inicial de longitud 2^n con $n \gg p$. No es conveniente tomar $p = n$, porque si la longitud de los coeficientes de aproximación $c^{(-p)}$ en el vector inicial es 1, y este se periodiza al antitransformar, entonces se tiene un vector de unos, con detalles nulos. Si $\Phi(x)$ tiene orden de aproximación polinomial ≥ 1 , entonces por el teorema 2.2 la antitransformada será constante ($c_k^{(0)} = C$).

Algoritmo 2.2. Gráfico de la wavelet:

Una vez calculados $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p-1)}$, correspondientes a $\Phi^{(1)}(x), \Phi^{(2)}(x), \dots, \Phi^{(p-1)}(x)$ con el algoritmo anterior, se reemplaza $\Phi^{(p-1)}(x)$ en la ecuación de la wavelet 2.2 para obtener

$$\Psi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^N g_k \Phi^{(p-1)}(2x - k) = \sum_{k=0}^N a_k^{(p)} \chi(2^p x - k),$$

con

$$a^{(p)} = a^{(p-1)} * (g \uparrow 2^{p-1}).$$

Veremos que esto corresponde (salvo constantes) a calcular los distintos pasos de la transformada inversa de un vector de longitud 2^n que tiene un 1 como primer elemento de detalle y ceros en todas las posiciones restantes:

$$\begin{bmatrix} c_0^{(-p)} & \dots & c_{2^{n-p}-1}^{(-p)} & d_0^{(-p)} & \dots & d_{2^{n-p}-1}^{(-p)} & \dots & d_0^{(-1)} & \dots & d_{2^{n-1}-1}^{(-1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Si se calcula la antitransformada de este vector, no se obtienen los $a^{(1)} \dots a^{(p)}$, sino otra secuencia de coeficientes $b^{(1)} \dots b^{(p)}$. Probaremos que en el último paso coinciden: $b^{(p)} = a^{(p)}$.

$$\text{Vector inicial} \begin{cases} c_k^{(-p)} = 0 & k = 0, \dots, 2^{n-p} - 1 \\ d_0^{(-p)} = 1 \\ d_k^{(-p)} = 0 & k = 1, \dots, 2^{n-p} - 1 \\ d_k^{(j)} = 0, & j = -p+1, \dots, -1, \\ & k = 0, \dots, 2^{n+j} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k c_k^{(-p)} \Phi_{-p,k}(x) + \sum_{j=-p}^{-1} \sum_k d_k^{(j)} \Psi_{j,k}(x) \\ &= \Psi_{-p,0}(x) = 2^{-p/2} \Psi(2^{-p}x) \text{ función asociada a los valores iniciales.} \end{aligned}$$

En efecto, al realizar la antitransformada se calculan coeficientes $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(p)}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k c_k^{(-(p-1))} \Phi_{-(p-1),k}(x), \\ c^{(-(p-1))} &= (c^{(-p)} \uparrow 2) * \frac{h}{\sqrt{2}} + (d^{(-p)} \uparrow 2) * \frac{g}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{b^{(1)}}{\sqrt{2}} \text{ antitransformada 1 paso,} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k c_k^{(-(p-2))} \Phi_{-(p-2),k}(x), \\ c^{(-(p-2))} &= (c^{(-(p-1))} \uparrow 2) * \frac{h}{\sqrt{2}} \\ &= \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \uparrow 2 \right) * \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{b^{(2)}}{2} \text{ antitransformada 2 pasos.} \\ &\dots \end{aligned}$$

Y por último

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k c_k^{(0)} \Phi(x-k), \\ c^{(0)} &= (c^{(-1)} \uparrow 2) * \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{b^{(p)}}{2^{p/2}} \text{ antitransformada } p \text{ pasos.} \end{aligned}$$

Los coeficientes $b^{(k)}$ verifican

$$\begin{aligned} b^{(1)} &= g = a^{(0)} * g \\ b^{(2)} &= (b^{(1)} \uparrow 2) * h = (g \uparrow 2) * h = a^{(1)} * (g \uparrow 2) \\ b^{(3)} &= (b^{(2)} \uparrow 2) * h = \{[(g \uparrow 2) * h] \uparrow 2\} * h \end{aligned} \tag{2.18}$$

Según 2.18, la respuesta en frecuencias de $b^{(3)}$ es

$$\hat{B}^{(3)}(w) = \hat{G}(4w) \hat{H}(2w) \hat{H}(w)$$

que corresponde a $(h \uparrow 2) * h * (g \uparrow 2^2)$ Entonces

$$b^{(3)} = (h \uparrow 2) * h * (g \uparrow 2^2) = a^{(2)} * (g \uparrow 2^2).$$

Siguiendo este razonamiento se llega a

$$b^{(p)} = (b^{(p-2)} \uparrow 2) * h = a^{(p-1)} * (g \uparrow 2^{p-1}) = a^{(p)}.$$

De nuevo, aplicando el lema 2.1, se llega a que

$$2^{-p/2} \Psi \left(\frac{k}{2^p} \right) \approx c_k^{(0)} = \frac{b_k^{(p)}}{2^{p/2}},$$

$$\Psi \left(\frac{k}{2^p} \right) \approx b_k^{(p)} = a_k^{(p)},$$

si p es suficientemente grande, y se obtiene una versión aproximada de la wavelet discretizada.

2.8 Continuidad de las funciones construídas

Veremos cómo con el cálculo del radio espectral conjunto se puede verificar la continuidad de las funciones de escala o de las wavelets. Para mayor información, ver [6], [7], [8] y [9].

Para $x \in [0, 1]$ definimos el vector $v(x)$ de N elementos:

$$v(x) = \begin{bmatrix} v_0(x) \\ v_1(x) \\ v_2(x) \\ \vdots \\ v_{N-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(x) \\ \Phi(x+1) \\ \Phi(x+2) \\ \vdots \\ \Phi_1(x+N-1) \end{bmatrix}$$

De la ecuación 2.1 se llega a

$$\begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi(1) \\ \Phi(2) \\ \dots \\ \Phi(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & & & & \\ h_2 & h_1 & h_0 & & \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ \dots & & & & \\ & & & h_N & h_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi(1) \\ \Phi(2) \\ \dots \\ \Phi(N-1) \end{bmatrix},$$

que volvemos a escribir como

$$\Phi_\Gamma = T_0 \Phi_\Gamma,$$

donde

$$[T_0]_{i,j} = h_{2i-j}.$$

Nota 2.18. La posición arriba a la izquierda de cada matriz corresponde a los índices(0,0).

Además

$$\begin{bmatrix} \Phi(\frac{1}{2}) \\ \Phi(\frac{3}{2}) \\ \Phi(\frac{5}{2}) \\ \dots \\ \Phi(\frac{2N-1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & & & \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ \dots & & & & \\ & & & h_N & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi(1) \\ \Phi(2) \\ \dots \\ \Phi(N-1) \end{bmatrix}$$

y llamando $v(\frac{1}{2}) = \Phi_\Pi$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\Phi_\Pi = T_1 \Phi_\Gamma,$$

donde

$$[T_1]_{i,j} = h_{2i-j+1}.$$

Lema 2.2. *Valen las siguientes igualdades*

$$v(x) = T_0 v(2x), \quad \text{si } x \in \frac{1}{2} [0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \quad (2.19)$$

$$v(x) = T_1 v(2x - 1), \quad \text{si } x \in \frac{1}{2} \{[0, 1] + 1\} = [\frac{1}{2}, 1]. \quad (2.20)$$

$$v(\frac{1}{2}) = T_0 v(1) = T_1 v(0)$$

Lema 2.3. *Sea $x \in [0, 1]$, y sea $x = 0.d_1 d_2 \dots d_m$ su desarrollo binario, donde cada $d_j \in \{0, 1\}$. Si se define*

$$\tau x = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - 1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

entonces valen

$$v(x) = T_{d_1} v(\tau x)$$

y

$$v(x) = T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} v(\tau^m x)$$

Es evidente que los productos de matrices T_0 y T_1 deben estar acotados.

Teorema 2.6. *Una función de soporte compacto $\Phi(x)$, que cumple la ecuación de dilatación, es Hölder continua si y solo si $v(x)$ es Hölder continua, y el exponente de Hölder es el mismo para ambas.*

Lema 2.4. *Si el orden de aproximación polinomial es 1, entonces*

- las columnas de T_0 y T_1 suman 1,
- $\lambda = 1$ es autovalor de T_0 y T_1 ,
- $W^T = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$ es autovector a izquierda de ambas matrices:

$$W^T T_0 = W^T \text{ y } W^T T_1 = W^T$$

Lema 2.5. *Si el orden de aproximación polinomial es s , entonces $\lambda = 1, \frac{1}{2}, \dots, (\frac{1}{2})^{s-1}$ son autovalores de T_0 y T_1 .*

Lema 2.6. *Si $x < y$ son 2 números diádicos, con desarrollo binario finito. Si son cercanos, coinciden en los primeros m dígitos, y*

$$v(y) - v(x) = T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} (v(\tau^m y) - v(0)).$$

Entonces para analizar la regularidad es necesario estudiar el comportamiento de los productos $T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m}$ sobre todos las posibles diferencias $v(z) - v(0)$, con z diádico.

Lema 2.7. • Sea E el complemento ortogonal a W en \mathbb{R}^N . Entonces E es un subespacio de dimensión $N - 1$ invariante por T_0 y por T_1 , es decir, si $y \in E \Rightarrow T_0y \in E$ y $T_1y \in E$.

En efecto, si $y \in E$, entonces $W^T T_0 y = W^T y = 0$, y $W^T T_1 y = W^T y = 0$.

- E contiene a $v(1) - v(0)$. Esto se debe a que

$$v(1) - v(0) = \begin{bmatrix} \Phi(1) \\ \Phi(2) \\ \Phi(3) \\ \dots \\ \Phi(N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi(1) \\ \Phi(2) \\ \dots \\ \Phi(N-1) \end{bmatrix},$$

y

$$W^T(v(1) - v(0)) = \Phi(1) - \Phi(0) + \Phi(2) - \Phi(1) + \Phi(3) - \Phi(2) + \dots$$

Los únicos términos que no se cancelan son $\Phi(N)$ y $\Phi(0)$, que son 0 por la hipótesis de continuidad de $\Phi(x)$. Entonces $W \perp [v(1) - v(0)]$ y $v(1) - v(0) \in E$.

Teorema 2.7. Si para todo m vale

$$\max_{d_j=0,1} \|(T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m})/E\| \leq C\theta^m$$

con $\theta < 1$, entonces $v(x)$ es Hölder continuo con exponente $s = -\log_2 \theta$.

Definición 2.2. El radio espectral conjunto de 2 matrices T_0/E y T_1/E se define como

$$\rho = \rho(T_0, T_1) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{d_j=0,1} \|T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m}/E\|^{1/m}.$$

Entonces si $\rho < 1$, entonces $v(x)$ es Hölder continuo con exponente $s = -\log_2 \rho$.

Teorema 2.8.

$$\rho(T_0, T_1) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{d_j=0,1} \rho(T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m}/E)^{1/m},$$

donde en el término de la derecha ρ indica el radio espectral de una matriz.

Teorema 2.9.

$$\max_{d_j=0,1} \rho(T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m}/E)^{1/m} \leq \rho(T_0, T_1) \leq \max_{d_j=0,1} \|T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m}/E\|^{1/m}.$$

Se puede obtener una cota inferior del radio espectral conjunto calculando el mayor autovalor en módulo de todos los m productos de T_0/E y T_1/E , en cualquier orden.

Por ejemplo para $m = 2$, se calculan $\rho(T_0T_0/E)^{1/2}$, $\rho(T_0T_1/E)^{1/2}$, $\rho(T_1T_0/E)^{1/2}$ y $\rho(T_1T_1/E)^{1/2}$ y se elige el máximo.

Dado θ una estimación de $\rho(T_0T_1/E)$, existe un algoritmo para verificar que $\rho(T_0T_1/E) \leq \theta$.

Algoritmo 2.3. Algoritmo de Heil y Colella [9]:

Indicaremos con tilde que tomamos la restricción de las matrices al subespacio E . ($\tilde{T}_0 = T_0/E$, $\tilde{T}_1 = T_1/E$, etc.)

Dado θ , se construye un árbol diádico con el fin de encontrar bloques $P = \tilde{T}_{d_1}\tilde{T}_{d_2}\dots\tilde{T}_{d_m}$, tales que $\|P\|^{1/m} \leq \theta$.

Del nodo raíz del árbol salen 2 ramas: una para el nodo (que representa a) \tilde{T}_0 y la otra para el nodo \tilde{T}_1 .

Si $\|\tilde{T}_0\| \leq \theta$, el nodo \tilde{T}_0 es terminal.

Si $\|\tilde{T}_0\| > \theta$, se agregan 2 ramas a ese nodo \tilde{T}_0 . Una para el nodo $\tilde{T}_0\tilde{T}_0$, y la otra para $\tilde{T}_0\tilde{T}_1$.

En general, si un nodo representa a $P = \tilde{T}_{d_1}\tilde{T}_{d_2}\dots\tilde{T}_{d_m}$, y $\|P\|^{1/m} \leq \theta$, entonces es un nodo terminal (hoja). Si $\|P\|^{1/m} > \theta$, se le agregan 2 hijos: $P\tilde{T}_0$ y $P\tilde{T}_1$, y se controla si $\|P\tilde{T}_0\|^{1/(m+1)} \leq \theta$ o no, y si $\|P\tilde{T}_1\|^{1/(m+1)} \leq \theta$ o no.

Si todas las ramas llegan a un nodo terminal, se termina de construir el árbol, y se puede afirmar que $\rho(T_0T_1/E) \leq \theta$. A continuación esbozaremos la demostración.

Con las secuencias de ceros y unos (que corresponden a los productos de \tilde{T}_0 y \tilde{T}_1) de los nodos terminales se forma un alfabeto A .

Dado cualquier producto de matrices \tilde{T}_0 y \tilde{T}_1 , por ejemplo $\tilde{T}_{d_1}\tilde{T}_{d_2}\dots\tilde{T}_{d_m}$, se busca en el árbol la secuencia formada por los primeros dígitos binarios correspondientes: $d_1d_2\dots$ hasta llegar al primer nodo terminal, y así encontrar la primer secuencia que pertenece al alfabeto A : $d_1d_2\dots d_{m_1}$. Con los dígitos restantes se procede de igual forma. De esta manera, $d_1d_2\dots d_m$ se puede escribir como una sucesión de secuencias del alfabeto:

$$d_1d_2\dots d_{m_1}d_1d_2\dots d_{m_2}\dots d_1d_2\dots d_{m_n},$$

donde $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$. Entonces

$$\begin{aligned} & \|\tilde{T}_{d_1}\tilde{T}_{d_2}\dots\tilde{T}_{d_m}\|^{1/m} \\ & \leq \left[\left(\|\tilde{T}_{d_1}\tilde{T}_{d_2}\dots\tilde{T}_{d_{m_1}}\|^{1/m_1} \right)^{m_1} \dots \left(\|\tilde{T}_{d_1}\tilde{T}_{d_2}\dots\tilde{T}_{d_{m_n}}\|^{1/m_n} \right)^{m_n} \right]^{1/m} \\ & \leq [\theta^{m_1} \theta^{m_2} \dots \theta^{m_n}]^{1/m} = \theta. \end{aligned}$$

Lo anterior vale sobre todos los productos de longitud m , y vale $\forall m$. Entonces también vale en el límite cuando $m \rightarrow \infty$, y se prueba que el radio espectral conjunto es inferior a θ .

Si durante la construcción del árbol, en un nodo P vale que $\|P\|^{1/m} > \theta$, se siguen buscando nodos descendientes de P para ver si

$$\|P\tilde{T}_{d_1}\dots\tilde{T}_{d_j}\|^{1/(m+j)} \leq \theta.$$

Es decir, si fuera cierto que $\rho(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1) > \theta$, entonces esto no se detectaría y nunca se terminaría de construir el árbol.

En 1995 Lagarias y Wang conjeturaron que existía un producto finito de matrices $\tilde{T}_{d_1}\dots\tilde{T}_{d_m}$ tal que $\rho(\tilde{T}_{d_1}\dots\tilde{T}_{d_m})^{1/m} = \rho(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1)$. Recientemente se demostró que esta conjetura era falsa [10], y que el cálculo del radio espectral conjunto es un problema NP-hard [11], [12].

2.9 Procesamiento de imágenes: wavelets separables

En el procesamiento de imágenes, la manera mas sencilla de proceder es la de aplicar un paso de la transformada unidimensional primero a las filas y luego a las columnas de la imagen. Esto da origen a las funciones de escala y a las wavelets *separables*, una función de escala $\Phi(x)\Phi(y)$ y 3 wavelets asociadas: $\Psi(x)\Phi(y)$, $\Phi(x)\Psi(y)$, $\Psi(x)\Psi(y)$. Las primeras 2 wavelets capturarán los detalles de una imagen en el sentido vertical y horizontal, respectivamente, para cada escala. Y la última los detalles diagonales.

En cuanto a los subespacios, lo anterior equivale a tomar el producto tensorial de los espacios generados por un análisis de multirresolución en una dimensión:

$$\begin{aligned} V_0 &= V_0^{\{x\}} \otimes V_0^{\{y\}} = \text{gen}\{\Phi(x-i)\Phi(y-j)\} \\ &= [V_{-1}^{\{x\}} \oplus W_{-1}^{\{x\}}] \otimes [V_{-1}^{\{y\}} \oplus W_{-1}^{\{y\}}] \\ &= V_{-1} \oplus W_{-1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} V_{-1} &= [V_{-1}^{\{x\}} \otimes V_{-1}^{\{y\}}] \\ W_{-1} &= [\{V_{-1}^{\{x\}} \otimes W_{-1}^{\{y\}}\} \oplus \{W_{-1}^{\{x\}} \otimes V_{-1}^{\{y\}}\} \oplus \{W_{-1}^{\{x\}} \otimes W_{-1}^{\{y\}}\}]. \end{aligned}$$

A continuación deducimos las fórmulas para un paso de la transformada. Sea X la imagen original de $N \times N$, y $f(x, y) \in V_0$ su función asociada, en la imagen y es el eje horizontal y x es el eje vertical hacia abajo:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_{ik} \Phi(x-i)\Phi(y-k) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} X_{ik} \Phi(y-k) \right\} \Phi(x-i). \end{aligned}$$

Para cada i fijo se aplica la transformada wavelet a $X_{i\cdot}$, la fila i de X , y se obtienen los coeficientes $\tilde{c}_{i,\cdot}^{(-1)}$ y $\tilde{d}_{i,\cdot}^{(-1)}$. La función entre llaves, que pertenece a $V_0^{\{y\}}$, se escribe ahora en las bases de $V_{-1}^{\{y\}}$ y $W_{-1}^{\{y\}}$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sum_{k=0}^{N/2-1} \tilde{c}_{i,k}^{(-1)} \Phi_{-1,k}(y) + \sum_{k=0}^{N/2-1} \tilde{d}_{i,k}^{(-1)} \Psi_{-1,k}(y) \right\} \Phi(x-i) \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{c}_{i,k}^{(-1)} \Phi(x-i) \right\} \Phi_{-1,k}(y) + \sum_{k=0}^{N/2-1} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{d}_{i,k}^{(-1)} \Phi(x-i) \right\} \Psi_{-1,k}(y). \end{aligned}$$

Por último se fija el índice k y se aplica la transformada a $\tilde{c}_{\cdot,k}^{(-1)}$ y $\tilde{d}_{\cdot,k}^{(-1)}$. Las 2 expresiones entre llaves, que pertenecen a $V_0^{\{x\}}$ se escriben en las bases de $V_{-1}^{\{x\}}$ y $W_{-1}^{\{x\}}$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{k=0}^{N/2-1} \left\{ \sum_{i=0}^{N/2-1} LL_{i,k} \Phi_{-1,i}(x) + \sum_{i=0}^{N/2-1} LH_{i,k} \Psi_{-1,i}(x) \right\} \Phi_{-1,k}(y) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N/2-1} \left\{ \sum_{i=0}^{N/2-1} HL_{i,k} \Phi_{-1,i}(x) + \sum_{i=0}^{N/2-1} HH_{i,k} \Psi_{-1,i}(x) \right\} \Psi_{-1,k}(y), \end{aligned}$$

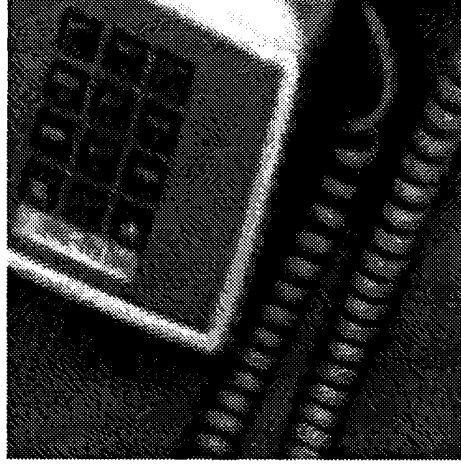


Figura 2.13: Imagen original

y reorganizando los términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^{N/2-1} \sum_{k=0}^{N/2-1} LL_{i,k} \Phi_{-1,i}(x) \Phi_{-1,k}(y) + \sum_{i=0}^{N/2-1} \sum_{k=0}^{N/2-1} LH_{i,k} \Psi_{-1,i}(x) \Phi_{-1,k}(y) \\
 &+ \sum_{i=0}^{N/2-1} \sum_{k=0}^{N/2-1} HL_{i,k} \Phi_{-1,i}(x) \Psi_{-1,k}(y) + \sum_{i=0}^{N/2-1} \sum_{k=0}^{N/2-1} HH_{i,k} \Psi_{-1,i}(x) \Psi_{-1,k}(y).
 \end{aligned}$$

En la figura 2.13 se observa la imagen original de un teléfono. El color blanco se representa con 255, y el negro con 0, en total hay 256 niveles posibles de gris. Si se aplica la transformada Haar a las filas, se obtiene una matriz como en la figura 2.14, y si se aplica Haar a las columnas de esta última, se obtiene un paso de la transformada Haar separable –ver figura 2.15. Los coeficientes de las 3 submatrices de detalle son pequeños en comparación con los de aproximación: para poder observar la información que contiene cada subimagen de la transformada, éstas han sido reescaladas. La submatriz arriba a la derecha resalta los detalles verticales de la figura, y corresponde a la banda llamada *HL* (high-low). Sus coeficientes han sido filtrados con un filtro pasa-altos en dirección horizontal, y con un filtro pasa-bajos en dirección vertical. Si suponemos que el eje de la variable x es vertical, y el de la variable y es horizontal, estos coeficientes están asociados a la base $\Phi(x)\Psi(y)$ y sus corrimientos enteros. De manera análoga, la submatriz abajo a la izquierda resalta los detalles horizontales de la figura, corresponde a la banda llamada *LH*, y sus coeficientes están asociados a la base $\Psi(x)\Phi(y)$. Y la submatriz abajo a la derecha resalta los detalles diagonales de la figura, corresponde a la banda llamada *HH*, y sus coeficientes están asociados a la base $\Psi(x)\Psi(y)$. Finalmente, la submatriz arriba a la izquierda da una versión de la imagen de menor resolución, corresponde a los coeficientes de aproximación *LL*, y sus coeficientes están asociados a la base $\Phi(x)\Phi(y)$.

En la figura 2.16 se observa el segundo paso de la transformada Haar. (o la transformada Haar bajando 2 niveles). Y en la figura 2.17, se observan los valores reales de esta transformada: se puede apreciar la magnitud de los coeficientes de aproximación, que ocupan $\frac{1}{16}$ de la imagen transformada, en comparación con la relativa pequeñez de los coeficientes de detalle, que ocupan el resto. Esto es lo que hace posible la compresión de imágenes.

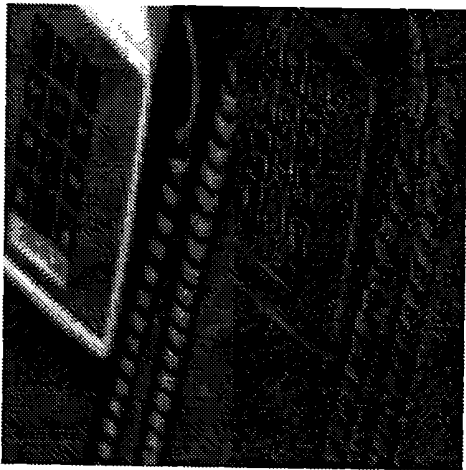


Figura 2.14: Un paso de Haar aplicado a las filas

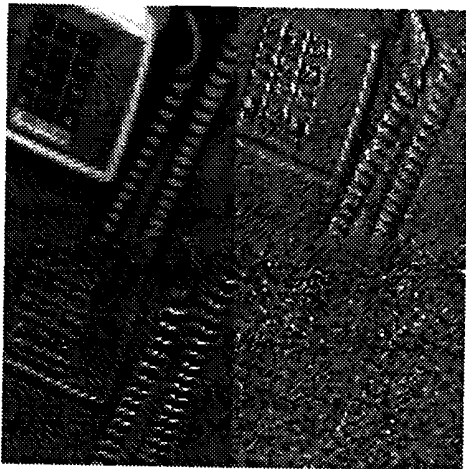


Figura 2.15: Haar separable: 1 paso

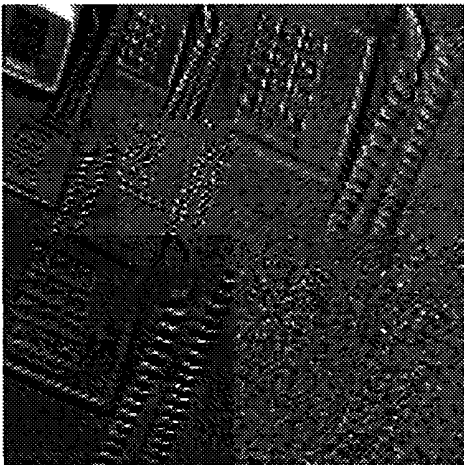


Figura 2.16: Haar separable: 2 pasos

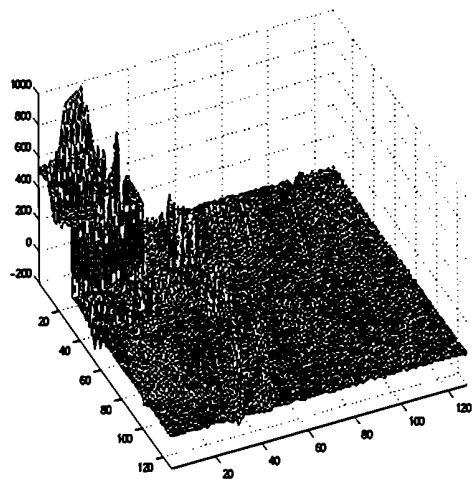


Figura 2.17: Valores de la transformada (2 pasos)



Figura 2.18: Ubicación del 15% de los coeficientes más significativos de la transformada Symlet8.

Nota 2.19. Si la función de escala unidimensional $\Phi(x)$ tiene aproximación polinomial de orden m , entonces

- la función de escala separable $\Phi(x)\Phi(y)$ aproxima a polinomios bidimensionales de grado $< m$,
- si la imagen original $X_{i,k}^{(0)} = p(x_i, y_k)$ es un polinomio discretizado de grado $r < m$, entonces los coeficientes de aproximación de la transformada wavelet $LL_{i,k}^{(-1)}$ son otro polinomio de grado r discretizado, y los coeficientes de detalle $LH_{i,k}^{(-1)}$, $HL_{i,k}^{(-1)}$, y $HH_{i,k}^{(-1)}$ son nulos.

2.9.1 Compresión de imágenes

Las imágenes digitales tienen mucho detalle que no es visible para el ojo humano. Esta es la razón por la cual es posible eliminar parte de la información sin que se puedan detectar diferencias. Para realizar una compresión con pérdida de una imagen, primero se la transforma, luego se cuantizan los coeficientes obtenidos y por último se codifican los coeficientes cuantizados.

Las wavelets tienen buena localización en el tiempo: los coeficientes más pequeños, que corresponden a oscilaciones (de algún elemento de la base) de amplitud despreciable, se pueden reemplazar por 0 sin que el error se propague a otras zonas de la imagen, y sin alterar la calidad de la imagen cuando se la reconstruye. Además, tiene bastante buena localización en las frecuencias, lo cual permite separar los detalles de la imagen que corresponden a diferentes resoluciones: la transformada wavelet separa el detalle fino, que corresponde a las frecuencias más altas, del detalle menos fino, que corresponde a frecuencias menos altas, etc.. Los coeficientes de detalle fino, que son los que ocupan la mayor parte de la transformada (el 75%), son muy pequeños en magnitud; después que se pasan por un umbral, se obtiene una representación esparsa de la imagen. En la figura 2.18 se observan los elementos no nulos de la transformada Symlet 8, después de pasar la transformada por un umbral que solo deja pasar el 15% de los coeficientes más significativos. En la figura 2.19 se observa la imagen reconstruida a partir del 15% de los coeficientes.

En la tabla 2.2 se observan los resultados de la reconstrucción de la imagen del teléfono con el 15% de los coeficientes más significativos en valor absoluto, utilizando las transformadas Haar, Daubechies

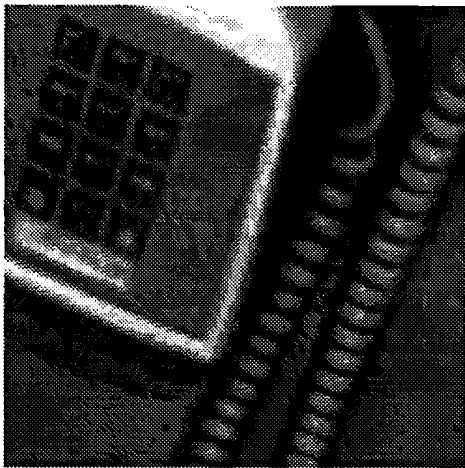


Figura 2.19: Reconstrucción con el 15% de los coeffs. Symmlet 8.

Transformada del teléfono (15% de los coeficientes)	MSE	PSNR
Haar	71.78	29.57 bpp
Daubechies 4	50.35	31.11 bpp
Symmlet 8	39.81	32.13 bpp

Tabla 2.2: MSE y PSNR de la reconstrucción con el 15% de los coeffs.

4 y Symmlet 8. Aquí se ve la importancia de la elección de la wavelet. Cuanto mayor es el orden de aproximación polinomial de la wavelet, se logran mejores resultados. La figura 2.20 corrobora este hecho. En esta figura se grafica el logaritmo del valor absoluto de todos los coeficientes de las 3 transformadas para otra imagen (Lena de 128×128). Los coeficientes están ordenados de mayor a menor, según su valor absoluto. Como las transformadas son ortogonales, las normas de los coeficientes de cada transformada son iguales entre si, por ser iguales a la norma de la imagen. (Las normas son normas de la imagen vectorizada, son normas vectoriales y no matriciales). La curva correspondiente a Symmlet8 cae por debajo de las otras hacia la derecha; este decaimiento indica que hay mayor concentración de la información en los primeros coeficientes para la Symmlet 8 que para las otras transformadas.

En la figura 2.16 se observa la correlación entre diferentes bandas de detalles que tienen la misma orientación pero distinta escala: son los elementos unidos por flechas en el gráfico 2.21. Esta correlación se aprovecha almacenando los coeficientes en una estructura de árbol quadtree, y cuantizando de manera progresiva los coeficientes más significativos primero, se optiene un código embebido. Shapiro [13] introdujo los zerotrees, o árboles de ceros: se codifica con símbolo especial los coeficientes cuyos descendientes en el árbol están por debajo de un umbral dado. Este umbral se va bajando hasta codificar todos los coeficientes. Por último se codifican los símbolos obtenidos con un codificador basado en entropía.: codificador aritmético o Huffman.

Cuando se trata de imágenes médicas, que son muy costosas de obtener, se prefiere una compresión sin pérdida de la información. Said y Pearlman [14] implementaron una transformada de enteros a enteros, con zerotrees y codificación aritmética en su codificador SPIHT –ver tabla 2.5–. Este permite comprimir las imágenes con o sin pérdida. Y hay muchas variantes sobre el tema: [15], [16], [17].

En 1999, alumnos de esta facultad implementaron un codificador, el AZBP – o EZW – [18], que

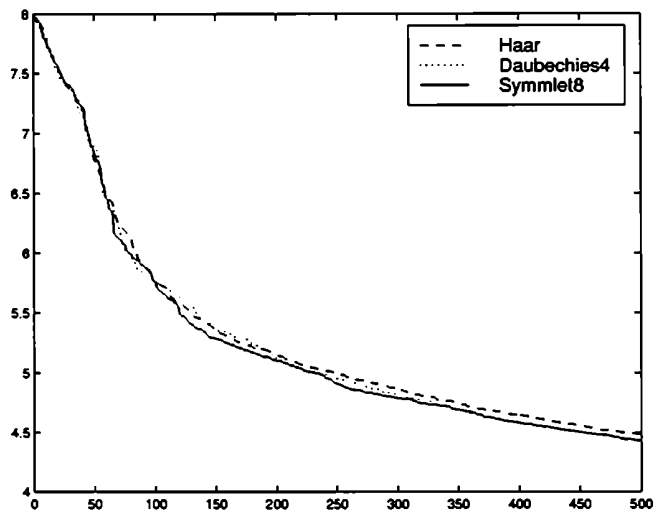


Figura 2.20: Decaimiento de los coeficientes en v.a.

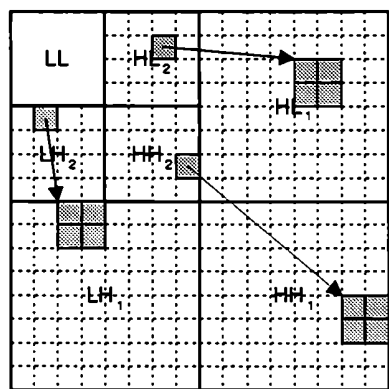


Figura 2.21: Correlación entre coeficientes de diferentes bandas de detalle.



Figura 2.22: Imagen original Lena 512 × 512.

Lena	bpp	Tamaño	PSNR
Original	8.000	256 KB	
Comprimida con JPEG	0.065	2 KB	24.45 dB
Comprimida con AZBP	0.065	2 KB	27.74 dB

Tabla 2.3: JPEG vs AZBP

permite comprimir, con o sin pérdida de información, imágenes en tonos de gris. Se implementó una transformada de enteros a enteros, y una variante de árboles de ceros con planos de bits. Una de las imágenes de prueba fue Lena – ver figura 2.22–, que está almacenada a razón de 8 bpp. Se la comprimió a razón de 0.065 bpp mediante 2 métodos: JPEG y AZBP. Obsérvense las 2 imágenes reconstruidas. En la imagen comprimida con JPEG – ver figura 2.23 – se observan distorsiones (pixelado o efectos de bloque), en cambio la imagen comprimida con AZBP – ver figura 2.24 – tiene una mejor calidad visual.

En la tabla 2.3 se confirma lo que se observa visualmente en las imágenes: a una misma tasa de compresión (123 : 1) la imagen comprimida con AZBP tiene un PSNR mayor, o sea un error menor.

El nuevo standard de compresión de imágenes propuesto, el JPEG2000, también permite comprimir imágenes con o sin pérdida. No utiliza árboles de ceros, porque prioriza la robustez del código frente a errores de transmisión.

2.9.2 Compresión de imágenes: un poco de historia.

En 1980 se formó en Estados Unidos la comisión JPEG (Joint Photographic Experts Group), buscando establecer normas internacionales para la compresión de imágenes digitales. Sus miembros provenían de dos organizaciones: la ISO (International Organization for Standardization) y la CCITT (Consultative Committee for International Telegraph and Telephone).

En 1988 se fijaron las normas para el compresor JPEG [19], basado en la transformada coseno discreta (DCT). Para comenzar una imagen se subdivide en bloques de 8 × 8. Intuitivamente el compresor



Figura 2.23: Lena comprimida por JPEG a 0.065 bpp.



Figura 2.24: Lena comprimida con AZBP a 0.065 bpp.

JPEG de 1988 corresponde a descartar información, suavizando las imágenes que quedan en los bloques. Técnicamente, se aplica la DCT, que corresponde a un cambio de base (se escribe la información en átomos o componentes de distinta frecuencia). Luego se cuantizan los coeficientes obtenidos, descartando las frecuencias más altas, y finalmente se aplica un codificador basado en entropía, como Huffman o codificación aritmética. Estos últimos asignan menos bits a los valores o símbolos más frecuentes, reduciendo el tamaño final del archivo. Al abrir una imagen .JPG, ésta se descomprime automáticamente: se invierten los pasos seguidos para comprimirla.

Durante varios años JPEG fue el compresor de imágenes más utilizado. Una imagen en tonos de gris se almacena sin comprimir a razón de 8 bits por pixel. A bajas tasas de compresión da muy buenos resultados, pero a altas tasas de compresión (menos de un bit por pixel) las imágenes presentan distorsiones (una especie de cuadrículado) debido a diferencias en las fronteras de los bloques. Al suavizar una imagen (un bloque) se pierden los bordes. La DCT tiene buena localización en frecuencias: permite separar bien las grandes oscilaciones que corresponden a cambios abruptos de color en los bordes, de las pequeñas oscilaciones que corresponden a variaciones suaves de color. Pero tiene mala localización en el tiempo (o espacio): un error en un coeficiente produce distorsiones en todo el bloque. Es por ello que surgió la necesidad de buscar otras técnicas de compresión.

En forma paralela, en la década de los 80 comenzó el auge de una nueva transformada: las wavelets (onditas, ondículas, ondelettes), y el FBI adoptó el compresor WSQ basado en wavelets para comprimir su base de huellas digitales. Intuitivamente, hacer la transformada wavelet de una imagen equivale a ver la imagen como una suma de detalles de la misma, a distinta resolución. Es decir, la imagen se ve como una suma de imágenes de bordes finos, bordes menos finos, medianos, gruesos, etc. La base de los coeficientes de la transformada es una misma función -la wavelet, que tiene la forma de una olita- desplazada en sus corrimientos enteros, y escalada en potencias de 2 para los detalles de diferente resolución. Hay diferentes familias de wavelets, diseñadas para lograr diferentes objetivos en el tratamiento de imágenes.

Las propiedades de las wavelets en las que se basa la compresión, son buena localización tiempo-frecuencia, coeficientes de los detalles finos muy pequeños en magnitud, representación esparsa de la imagen después de pasar un umbral, y estabilidad de la transformada frente a errores de cuantización. La cuantización progresiva de los coeficientes de la transformada, en la cual se envían primero los coeficientes más significativos, es ideal para la transmisión de una imagen por internet: el receptor recibe primero una imagen muy aproximada que se reconstruye con los primeros coeficientes, al recibir más detalles se va perfeccionando la imagen, y se para la transmisión cuando ésta tiene la resolución requerida. En cada paso obtiene la mejor imagen posible para la cantidad de bits transmitidos. Las wavelets permiten dar un tratamiento preferencial a una zona de una imagen. Y existen transformadas de enteros a enteros, que permiten realizar una compresión sin pérdida de la imagen: esto generalmente es requerido para imágenes médicas, por ejemplo.

En 1997 se volvió a reunir la comisión JPEG, integrada por ISO, ITU (International Telecommunications Union) -en 1992 se reorganizó la CCITT y se la llamó ITU- y la IEC (International Electrotechnical Commission), en orden a fijar las normas de un nuevo compresor de imágenes, el JPEG2000 [20], [21]. El objetivo era lograr una herramienta para la compresión de imágenes de diferentes tipos - imágenes de 2 tonos, en tonos de gris, en colores, y de componentes múltiples, como las satelitales-, que permitiera la transmisión progresiva de imágenes y a la vez fuera robusto ante errores de transmisión; que dejara elegir entre compresión sin pérdida de información, o con pérdida de la misma; que permitiera definir zonas de interés, comprimiendo el resto de la imagen; y que pudiera comprimir imágenes de gran tamaño, sin requerimientos grandes de memoria. Las normas fueron dadas a conocer en diciembre de 2000. Se incluyeron en las normas 2 transformadas wavelet diferentes, según el tipo de compresión buscado: con pérdida (Daubechies 9/7), o sin pérdida (Le Gall 5/3). Ya existen diferentes desarrolladores de las pautas fijadas por el JPEG2000: en la tabla 2.4 se da una lista de sus direcciones en internet, junto con el nombre del producto y el código fuente en el cual está escrito.

En la tabla 2.5 se agrega una lista de los compresores anteriores a JPEG2000. El primero de la lista, el JPEG, es siempre con pérdida. Los 3 siguientes son sin pérdida, y los 2 últimos permiten comprimir

JPEG2000	Prod.	Cód	Desarrolladores
http://www.jpeg.org (solo para socios)	V.M.8.6	C	
http://www.ece.ubc.ca/mdaddams/jasper	JasPer	C	Image Power U. British Columbia
http://jj2000.epfl.ch	JJ2000	Java	Cannon Research E.P.F. Lausanne Ericsson
http://uanews.opi.arizona.edu/cgi-bin/WebObjects/UANews.woa/wa/MainStoryDetails?ArticleID=5057		C	Univ. of Arizona New South Wales U.

Tabla 2.4: Direcciones de implementaciones de JPEG2000

Compresores anteriores	Prod.	Cód	Desarrolladores
http://www.ijg.org	JPEG	C	Indep. JPEG Group
http://www.spmg.ece.ubc.ca	SPMG	C	U. British Columbia
ftp://ftp.cs.cornell.edu/pub/multimed	JPEG sin pérd.	C	Cornell University
ftp://ftp.uu.net/graphics.png	PNG	C	
http://www.cipr.rpi.edu/research/SPIHT	SPIHT	C	Rensselaer Poly. Inst.
http://www.dc.uba.ar/people/materias/tcd/data/ezwcomp.zip	AZBP	C	U. de Buenos Aires

Tabla 2.5: Tabla de compresores anteriores a JPEG2000

con o sin pérdida.

Capítulo 3

Wavelets no separables en 2 dimensiones

Como se vio en el capítulo 2, para procesar una imagen se aplica habitualmente la transformada wavelet en una dimensión por filas y por columnas (la transformada wavelet separable), y esto prioriza las direcciones horizontal y vertical, lo cual no corresponde a nuestro sistema de visión. A una determinada escala los detalles de la imagen están repartidos en 3 submatrices. Una solución más general es hallar wavelets bidimensionales no separables. En este caso los filtros son bidimensionales no separables, y como las wavelets son funciones definidas sobre \mathbb{R}^2 , la decimación se hace por medio de una matriz D , de 2×2 , llamada matriz de dilatación. Existen varias matrices de dilatación, que generan diferentes particiones de Z^2 llamadas subgrillas, y dan lugar a diferentes formas de submuestreo o decimación.

Ayache [22], Kovacevic y Vetterli [23], He y Lai [24] y Faugère y otros [25] dieron ejemplos de wavelets no separables continuas con la matriz de dilatación $D = 2I$. En la decimación con la matriz $2I$ se eliminan las filas y las columnas impares, y se originan 3 submatrices de detalle en cada paso.

Belogay y Wang [26] hallaron ejemplos de wavelets ortogonales no separables asociadas a la matriz de dilatación D_4 , que corresponde a una subgrilla diferente a la que contemplaremos. (Ver nota 3.8 para la definición de D_4 y las subgrillas que determina.)

Kovacevic y Vetterli [27], Cohen y Daubechies [28], investigaron wavelets no separables con las matrices

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kovacevic y Vetterli hallaron ejemplos de wavelets ortogonales continuas. La decimación con D_1 , tanto como con D_2 , llamada decimación diagonal o al tresbolillo (en inglés quincunx, en francés quinconce), tiene como resultado el de eliminar todas las casillas negras de un tablero de ajedrez. Por cada paso se obtiene una sola submatriz de detalle. El filtrar con filtros no separables proporciona un tratamiento más isotrópico de la imagen, y el tener todos los detalles que corresponden a cada escala concentrados en una sola submatriz tiene ventajas para diferentes aplicaciones.

En este capítulo no se desarrollará el tema de la estimación de la regularidad, ni el cálculo del soporte de las funciones de escala y de las wavelets bidimensionales. Estos temas se desarrollarán más adelante en su forma más general (ver el capítulo 6 y la sección 8.6).

3.1 Definiciones y notación

- Las funciones de cuadrado integrable (o de energía finita) forman el espacio

$$L^2(\mathfrak{R}^2) = \left\{ f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R} \text{ tal que } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x_1, x_2)]^2 dx_1 dx_2 < \infty \right\}.$$

- Dadas $f(x_1, x_2)$ y $g(x_1, x_2)$ que pertenecen a $L^2(\mathfrak{R}^2)$, se define su producto escalar como

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

- Dos funciones $f(x_1, x_2)$ y $g(x_1, x_2)$ que pertenecen a $L^2(\mathfrak{R}^2)$, son *ortogonales* si

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

- Dada $f(x_1, x_2)$ se define su transformada Fourier como

$$\hat{f}(w_1, w_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-i(w_1 x_1 + w_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

- Dado un filtro bidimensional h_k , $k \in \Lambda \subset Z^2$, definimos su transformada Z como

$$H(z_1, z_2) = \sum_{k \in \Lambda} h_{(k_1, k_2)} z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}.$$

- Dado un filtro bidimensional h_k , definimos su respuesta en frecuencias, o transformada Fourier discreta en el tiempo, como

$$\hat{H}(w_1, w_2) = \sum h_{(k_1, k_2)} e^{-i(k_1 w_1 + k_2 w_2)}.$$

- Dado un filtro bidimensional h_k , $k \in \Lambda \subset Z^2$, definimos el símbolo

$$\tilde{H}(w_1, w_2) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \Lambda} h_{(k_1, k_2)} e^{-i(k_1 w_1 + k_2 w_2)} = \frac{1}{2} \hat{H}(w_1, w_2).$$

- Dado un par de enteros no negativos k_1 y k_2 , $k = (k_1, k_2)$ se define el grado de k como

$$|k| = k_1 + k_2.$$

- Dados dos pares de enteros $k = (k_1, k_2)$ y $s = (s_1, s_2)$, se define

$$k^s = (k_1^{s_1}, k_2^{s_2}).$$

- Dados un par de enteros $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ y un par de números reales $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, se define

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2}.$$

Nota 3.1. Por ejemplo, si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces $x^{(3,4)} = x_1^3 x_2^4$.

- Dados un par de enteros $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ y un par de complejos $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, se define

$$z^k = (z_1^{k_1}, z_2^{k_2}).$$

- Dada una matriz de dilatación D , y $z \in \mathbb{C}^2$, se define

$$z^D = (z_1^{d_{11}} z_2^{d_{21}}, z_1^{d_{12}} z_2^{d_{22}}).$$

- Dada una señal x y un filtro h bidimensionales, se define su convolución

$$(x * h)_k = \sum_{j_1} \sum_{j_2} x_{(k_1 - j_1, k_2 - j_2)} h_{(j_1, j_2)},$$

donde $k = (k_1, k_2)$.

Nota 3.2.

$$y = x * h \implies Y(z) = X(z)H(z).$$

- Para $j, k \in \mathbb{Z}^2$, se define el filtro

$$[\partial_j]_k = \begin{cases} 1 & \text{si } j_1 = k_1 \text{ y } j_2 = k_2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}.$$

- Un filtro bidimensional h se denomina *pasa-bajos* si para $w_0 < w_1$, $w = (w_1, w_2)$,

$$\hat{H}(w_1, w_2) \approx \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \|w\| < w_0 \\ 0 & \text{si } w_1 \leq \|w\| < \pi \end{cases}$$

y para $\|w\|$ entre w_0 y w_1 , $\hat{H}(w)$ cambia de aproximadamente 1 a aproximadamente 0.

- Un filtro bidimensional g se denomina *pasa-altos* si para $w_0 < w_1$,

$$\hat{G}(w) \approx \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \|w\| < w_0 \\ 1 & \text{si } w_1 \leq \|w\| < \pi \end{cases}$$

y para $\|w\|$ entre w_0 y w_1 , $\hat{G}(w)$ cambia de aproximadamente 0 a aproximadamente 1.

- Dado un filtro bidimensional h , se define su *reverso* h' como

$$h'_{k,l} = h_{-k,-l}.$$

• Se llama *soporte* de una función $f(x)$ al menor conjunto cerrado que contiene a todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) \neq 0$. Se dice que una función tiene soporte compacto si su soporte es un conjunto acotado.

• Dado el par de enteros no negativos $r = (r_1, r_2)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ se denomina *momento r* de f a la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{r_1} x_2^{r_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

• Se dice que $f(x)$ pertenece al espacio de Hölder $C^s(\mathbb{R}^2)$, con $0 < s < 1$ (o que $f(x)$ es Hölder continua con exponente de Hölder s) si

$$|f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|^s$$

donde K es una constante. En las condiciones anteriores también se dice que la función $f(x)$ es de Lipschitz con exponente s .

• Se dice que $f(x)$ pertenece al espacio de Hölder $C^s(\mathbb{R}^2)$, con $s \geq 1$ (o que $f(x)$ es Hölder continua con exponente de Hölder s) si $s = m + \alpha$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha < 1$, $f(x)$ es m veces diferenciable con continuidad, y vale

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq K \|x - y\|^\alpha$$

donde K es una constante.

• Una matriz B de 2×2 es una contracción del plano si para todo $x \in \mathbb{R}^2$ existe K , $0 < K < 1$, tal que

$$\|Bx\| \leq K \|x\|. \quad (3.1)$$

Si la norma en 3.1 es la norma euclídea (o norma 2), diremos que B es una contracción del plano en norma euclídea.

- Una matriz B de 2×2 es una dilatación del plano si para todo $x \in \mathbb{R}^2$ existe $K > 1$ tal que

$$\|Bx\| \geq K \|x\|. \quad (3.2)$$

Si la norma en 3.2 es la norma euclídea (o norma 2), diremos que B es una dilatación del plano en norma euclídea.

Mat.	Det.	autovalores	val. sing.	acción
D_1	-2	$\lambda_1 = +\sqrt{2}$ $\lambda_2 = -\sqrt{2}$	$\sigma_1 = \sqrt{2}$ $\sigma_2 = \sqrt{2}$	Simetría: eje $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix}^T$ +expansión en $\sqrt{2}$
D_2	2	$\lambda_1 = 1 + i$ $\lambda_2 = 1 - i$	$\sigma_1 = \sqrt{2}$ $\sigma_2 = \sqrt{2}$	Rotación en $\frac{\pi}{4}$ +expansión en $\sqrt{2}$

Tabla 3.1: Propiedades de D_1 y D_2

3.2 Análisis de multirresolución

Veamos primero la función de escala: en vez de considerar al producto de 2 funciones de escala como función de escala en 2 dimensiones - la llamada función de escala separable-, existe una manera más general de abordar el tratamiento de imágenes: se puede obtener una función de escala de 2 variables, no separable:

$$\Phi : \Re^2 \rightarrow \Re$$

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} h_k \Phi(Dx - k) \tag{3.3}$$

donde:

los valores h_k corresponden a un filtro no separable en 2 dimensiones.

D es una matriz de 2×2 , llamada matriz de dilatación, cuyos coeficientes son enteros y cuyos autovalores verifican $|\lambda_k| > 1$. Por razones prácticas de procesamiento de imágenes, que expondremos luego, pediremos que la matriz D tenga valores singulares que verifican $\sigma_k > 1$.

Por abuso de notación $\Phi(Dx - k)$ indica que se aplica Φ a las 2 componentes de

$$Dx - k = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Consideramos 2 posibles matrices de dilatación: D_1 , una reflexión o simetría seguida de una dilatación del plano real en $\sqrt{2}$, y D_2 , una rotación seguida de una dilatación del plano en $\sqrt{2}$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En la tabla 3.1 se listan sus propiedades.

Ambas matrices de dilatación D_1 y D_2 inducen una decomposición de \mathbb{Z}^2 , el conjunto de todos los pares de enteros, en dos subgrillas (cosets): Γ_0 y Γ_1 , similares a los cuadrados negros y blancos de un tablero de ajedrez.

$$\mathbb{Z}^2 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \ ; \ \Gamma_0 = \{D\mathbb{Z}^2\} \ ; \ \Gamma_1 = \left\{ D\mathbb{Z}^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \tag{3.4}$$

$$\begin{matrix} \text{O} & \times & \text{O} & \times & \text{O} \\ \times & \text{O} & \times & \text{O} & \times \\ \text{O} & \times & \text{O} & \times & \text{O} \end{matrix} \tag{3.5}$$

Esta distribución de las subgrillas se denomina al tresbolillo (quincunx, quinconce). Una subgrilla está indicada con cruces, y la otra con círculos. La cantidad de subgrillas Γ_i está determinada por la cantidad de clases del cociente $\Gamma/D\Gamma$, es decir, por $|D| = |\det(D)|$, que es siempre un número entero, y que en nuestro caso vale 2.

Los espacios de aproximación V_j , al igual que en el caso de una dimensión, verifican

$$.. \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset ..,$$

su unión es densa en $L^2(\mathfrak{R})$, y su intersección es la función nula. Son generados por las traslaciones en pares de enteros de la función de escala Φ , o de una versión dilatada o contraída de Φ :

$$V_j = \overline{\text{gen}\{\Phi(D^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^2}}.$$

Consideramos solamente los casos en que el conjunto

$$\{\Phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$$

es ortonormal.

La cantidad de funciones wavelet asociadas a una función de escala, al igual que la cantidad de bandas de detalle que se originan en cada paso de la transformada, es $|D| - 1$, que en nuestro caso es 1.

La wavelet verifica la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathfrak{R}^2 &\rightarrow \mathfrak{R} \\ \Psi(x) &= \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} g_k \Phi(Dx - k). \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde g es un filtro bidimensional, que se calcula a partir de h :

$$g_k = g_{(k_1, k_2)} = (-1)^{k_1 + k_2} h_{(1,1) - k}. \quad (3.7)$$

Para cada entero j , el subespacio W_j es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} ,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

y es generado por la wavelet

$$W_j = \text{gen}\{\Psi(D^j x - k)\}_k.$$

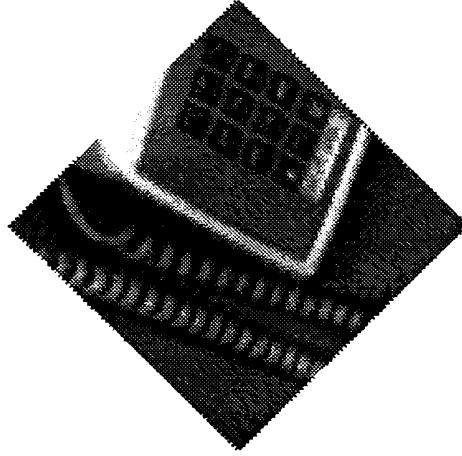
Nota 3.3. Si la matriz de dilatación es $D = 2I$, y existen filtros f y l de una dimensión tales los filtros bidimensionales h y g verifican

$$h_{i,j} = f_i f_j, \quad g_{i,j} = l_i l_j,$$

– h y g son filtros separables – entonces estamos ante la situación descrita en la sección 2.9 de wavelets separables.

3.3 Matrices de dilatación (1)

Veamos los efectos de aplicar una matriz de dilatación: El submuestreo, así como el sobremuestreo, son inducidos por la matriz de dilatación D :

Figura 3.1: Teléfono submuestreado con D_1

Definición 3.1. Submuestreo con la matriz D :

$$y = x \downarrow D \iff y(k) = x(Dk)$$

Aquí se eliminan componentes alternativamente en una grilla diagonal, es decir, se suprimen los casilleros negros en el tablero de ajedrez: son los pixels cuyos índices corresponden a la subgrilla Γ_1 . En cambio, se conservan los pixels $x(j) = x(j_1, j_2)$ cuyos índices corresponden a la subgrilla $\Gamma_0 : (j = Dk)$ y se ubican en la posición $k = D^{-1}j$. Aplicaremos la operación de submuestreo a la imagen del teléfono de la figura 2.13. En la figura 3.1 se observa el teléfono submuestreado con D_1 : la imagen queda espejada con respecto al eje de simetría, y es de menor tamaño. Y en la figura 3.2 se observa el teléfono submuestreado con D_2 : la imagen queda rotada en $-\frac{\pi}{4}$ y reducida.

Nota 3.4. En términos de la transformada Z ,

$$y = x \downarrow D \iff Y(z) = \frac{1}{2} [X(z^{D^{-1}}) + X(-z^{D^{-1}})]$$

$$Y(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} [X(\sqrt{z_1 z_2}, \sqrt{\frac{z_1}{z_2}}) + X(-\sqrt{z_1 z_2}, -\sqrt{\frac{z_1}{z_2}})] & \text{si } D = D_1 \\ \frac{1}{2} [X(\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}, \sqrt{z_1 z_2}) + X(-\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}, -\sqrt{z_1 z_2})] & \text{si } D = D_2 \end{cases}$$

Definición 3.2. : Sobremuestreo con la matriz D :

$$y = x \uparrow D \iff y_k = \begin{cases} x_r & \text{si } k = Dr \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las figura 3.3, y un detalle ampliado en la figura 3.4, corresponden tanto a la figura 3.1 sobremuestreada con D_1 , como a la figura 3.2 sobremuestreada con D_2 : la imagen recupera su orientación original, y se pone un cero (cuadrado negro) en el lugar que fue anulado.

Nota 3.5. En términos de la transformada Z , el sobremuestreo es

$$y = x \uparrow D \iff Y(z) = X(z^D) = \begin{cases} X(z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}) & \text{si } D = D_1 \\ X(z_1 z_2, \frac{z_2}{z_1}) & \text{si } D = D_2 \end{cases}$$

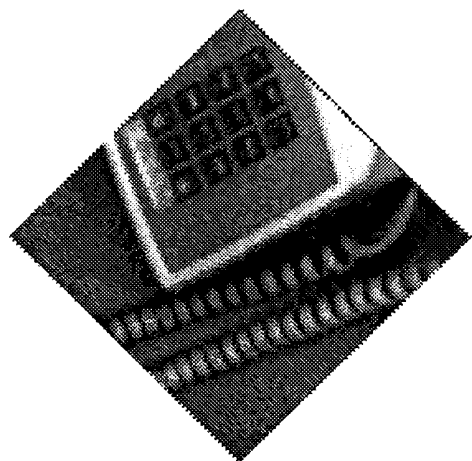


Figura 3.2: Teléfono submuestreado con D_2



Figura 3.3: Teléfono submuestreado y sobremuestreado.

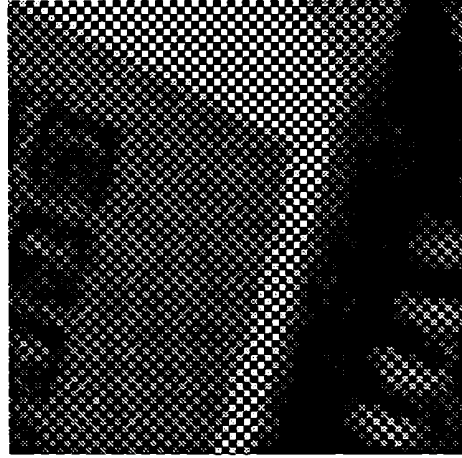


Figura 3.4: Teléfono sub y sobremuestreado- detalle.

3.4 Procesamiento de imágenes

Llamamos $c_k^{(0)}$ a la imagen original, $f_0(x)$ es su función asociada y $f_0 \in V_0$. Si se descompone a $f_0(x)$ en la suma de sus proyecciones sobre V_{-1} y W_{-1} , se tiene

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k^{(0)} \Phi(x - k) \\ &= f_{-1}(x) + r_{-1}(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k^{(-1)} \frac{1}{\sqrt{|D|}} \Phi(D^{-1}x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} d_k^{(-1)} \frac{1}{\sqrt{|D|}} \Psi(D^{-1}x - k). \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de ortogonalidad de las bases, y las ecuaciones 3.3 y 3.6, se deducen las fórmulas de análisis

$$c_k^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} h_{(j-Dk)} c_j^{(0)}, \quad (3.8)$$

$$d_k^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} g_{(j-Dk)} c_j^{(0)}, \quad (3.9)$$

que permiten calcular los coeficientes de un paso de la transformada wavelet. Aplicando las mismas fórmulas a $c_k^{(-1)}$ en vez de $c_k^{(0)}$, se obtiene el segundo paso de la transformada wavelet. Estos pasos están ejemplificados en las figuras 3.5 y 3.6, aplicando la transformada de Kovacevic- Vetterli con la matriz D_1 . Ha de notarse que los coeficientes de detalle son muy pequeños y que han sido reescalados para poder observar la información que contienen.

De manera análoga, para poder antitransformar, se obtiene la fórmula de síntesis:

$$c_k^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} h_{(k-Dj)} c_j^{(-1)} + \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} g_{(k-Dj)} d_j^{(-1)} \right] \quad (3.10)$$

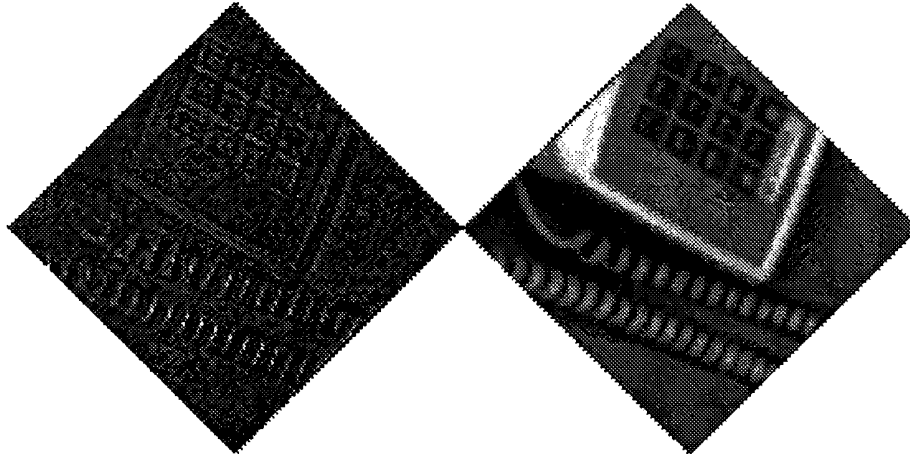


Figura 3.5: 1 paso de la transformada KV: $d_k^{(-1)}$ y $c_k^{(-1)}$

Las fórmulas 3.8 y 3.9 pueden interpretarse por medio de convoluciones de la imagen con los filtros h y g , seguidos de submuestreos con D , según el esquema , y la fórmula 3.10 puede interpretarse como sobremuestreos de los coeficientes de aproximación y de detalle con D seguidos de convoluciones con h y g , sumados, según el esquema 3.7.

3.4.1 Formulación polifase

Las fórmulas de análisis 3.8 y 3.9 pueden escribirse de una manera equivalente, en su formulación polifase, de manera a no realizar operaciones innecesarias. Para ello se separan los pixels de la señal y los coeficientes de los filtros según a cual subgrilla -fase- pertenecen.

Si x_0 son los pixels de la imagen x que pertenecen a la subgrilla Γ_0 , y x_1 son los pixels de la imagen que pertenecen a la subgrilla Γ_1 , se tiene entonces que

$$\begin{aligned} x_0 &= x \downarrow D \\ x_1 &= (x * \partial_{-10}) \downarrow D \\ x &= [x_0 \uparrow D] + [\partial_{10} * (x_1 \uparrow D)]. \end{aligned}$$

Escribiendo esto en términos de la transformada Z, se tiene:

$$\begin{aligned} X_0(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} x_{Dj} z^{-j} \\ X_1(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} x_{Dj+(10)} z^{-j} \\ X(z) &= X_0(z^D) + z_1^{-1} X_1(z^D). \end{aligned}$$

Análogamente, para el filtro h se tiene

$$\begin{aligned} h_0 &= h \downarrow D \\ h_1 &= (h * \partial_{-10}) \downarrow D \\ h &= [h_0 \uparrow D] + [\partial_{10} * (h_1 \uparrow D)], \end{aligned}$$

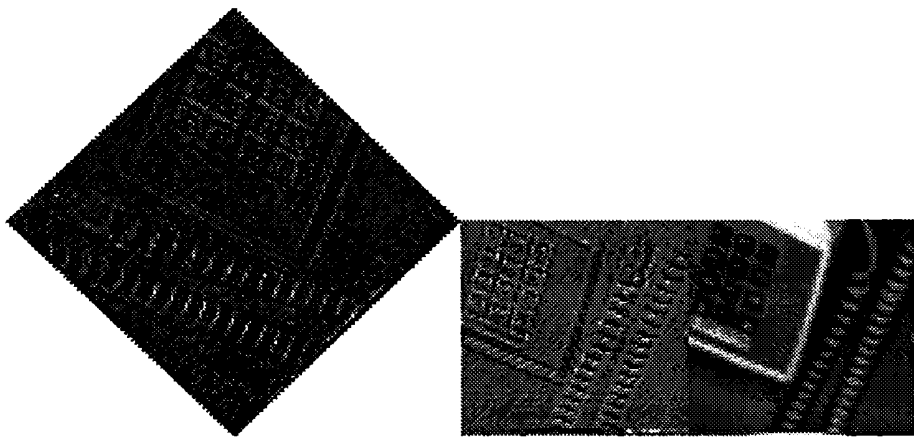


Figura 3.6: 2 pasos de la transformada KV: $d_k^{(-1)}$, $d_k^{(-2)}$ y $c_k^{(-2)}$

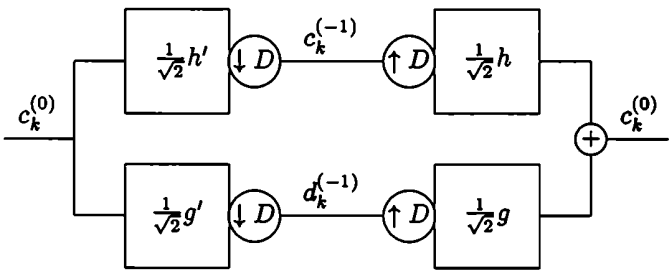


Figura 3.7: Esquema de análisis-síntesis en dimensión 2

y en términos de la transformada Z

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} h_{Dj} z^{-j} \\ H_1(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} h_{Dj+(10)} z^{-j} \\ H(z) &= H_0(z^D) + z_1^{-1} H_1(z^D). \end{aligned}$$

Se hace la misma descomposición sobre el filtro g .

Se puede ver que la transformada Z de $y_1 = (x * h') \downarrow D$ es

$$Y_1(z_1, z_2) = X_0(z_1, z_2) H_0\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) + X_1(z_1, z_2) H_1\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right), \quad (3.11)$$

y, análogamente, la transformada Z de $y_2 = (x * g') \downarrow D$ es

$$Y_2(z_1, z_2) = X_0(z_1, z_2) G_0\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) + X_1(z_1, z_2) G_1\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right), \quad (3.12)$$

Esto, en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) & H_1\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) \\ G_0\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) & G_1\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$= P_{H', G'} \begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

En general, se define

$$P_{F, J} = \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \\ J_0(z) & J_1(z) \end{bmatrix}$$

como la *matriz polifase* de los filtros F y J . Entonces, las ecuaciones 3.8 y 3.9 son equivalentes a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C^{(-1)}(z) \\ D^{(-1)}(z) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{|D|}} \begin{bmatrix} H_0\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) & H_1\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) \\ G_0\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) & G_1\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^{(0)}(z) \\ C_1^{(0)}(z) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|D|}} P_{H', G'} \begin{bmatrix} C_0^{(0)}(z) \\ C_1^{(0)}(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y, en términos de convoluciones, a

$$\begin{aligned} c^{(-1)} &= \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left[(c_0^{(0)} * h'_0) + (c_1^{(0)} * h'_1) \right] \\ d^{(-1)} &= \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left[(c_0^{(0)} * g'_0) + (c_1^{(0)} * g'_1) \right] \end{aligned}$$

Estas últimas ecuaciones son computacionalmente más eficientes.

3.5 Propiedades

3.5.1 Existencia de la función de escala

Forma Fourier de la ecuación de dilatación:

Si se transforma Fourier la ecuación de dilatación 3.3, resulta

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(w) &= \frac{1}{2} \sum_k h_k e^{-i\langle (D^{-1})^T w, k \rangle} \widehat{\Phi}((D^{-1})^T w) = \widetilde{H}((D^{-1})^T w) \widehat{\Phi}((D^{-1})^T w) \\ &= \widetilde{H}((D^{-1})^T w) \widetilde{H}((D^{-2})^T w) \widehat{\Phi}((D^{-2})^T w) = \dots \\ &= \widehat{\Phi}((D^{-N})^T w) \prod_{n=1}^N \widetilde{H}((D^{-n})^T w).\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $N \rightarrow \infty$, y aplicando $\widehat{\Phi}(0,0) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x) dx = 1$, se obtiene

$$\widehat{\Phi}(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \widetilde{H}((D^{-n})^T w).$$

Para que est producto infinito sea convergente, debe ser $\widetilde{H}(0,0) = 1$, y entonces

$$\widehat{H}(0,0) = \sum_{k \in \Lambda} h_{(k_1, k_2)} = 2.$$

3.5.2 Ortogonalidad

Si el conjunto $\{\Phi(x - k)\}_k$ es ortonormal ($x \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{Z}^2$) esto implica

$$\sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} h_k h_{k+Dj} = \begin{cases} |\det(D)| I & (j_1, j_2) = (0,0), \\ 0 & (j_1, j_2) \neq (0,0). \end{cases} \quad (3.15)$$

Si el conjunto $\{\Phi(x - k)\}_k$ es ortogonal a $\Psi(x) - x \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{Z}^2$ - esto implica

$$\sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} h_k g_{k+Dj} = 0 \quad \forall j = (j_1, j_2). \quad (3.16)$$

Si el conjunto $\{\Psi(x - k)\}_k$ es ortonormal - $x \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{Z}^2$ - esto implica

$$\sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} g_k g_{k+Dj} = \begin{cases} |\det(D)| I & (j_1, j_2) = (0,0), \\ 0 & (j_1, j_2) \neq (0,0). \end{cases} \quad (3.17)$$

3.5.3 Soporte compacto

Si el filtro asociado a la función de escala (o a la wavelet) tiene finitas entradas no nulas, el soporte de la función es compacto. No es tan sencillo de obtener el soporte como en el caso unidimensional. El soporte de una función de escala $\Phi(x)$ que verifica 3.3, está contenido en un conjunto cerrado S , tal que

$$S = \bigcup_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} D^{-1} \{S + k\}.$$

3.5.4 Aproximación polinomial

Definición 3.3. Decimos que $\Phi(x)$ tiene *aproximación polinomial de orden m (accuracy m)* si cualquier polinomio $p(x) = p(x_1, x_2)$ de grado $|r| < m$ puede escribirse como

$$p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \alpha_k \Phi(x - k). \quad (3.18)$$

Por ejemplo, si la función de escala tiene aproximación polinomial de orden $m = 3$, entonces vale la expresión 3.18 para los polinomios $1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, y x_2^2$.

Si la función de escala bidimensional tiene aproximación polinomial de orden m , entonces

$$\sum_{k \in \Gamma_i} h_k = 1, \quad \sum_{k \in \Gamma_i} k^r h_k = v_r, \quad i = 0, 1, \quad |r| = 1, \dots, m-1 \quad (3.19)$$

donde v_r son ciertas constantes

3.5.5 Buena localización en las frecuencias

Al igual que en el caso unidimensional, para el caso bidimensional también vale que si los filtros h y g son finitos, tanto la función de escala como la wavelet tienen soporte compacto; pero sus transformadas Fourier no puede tener soporte compacto. La localización en frecuencias nunca será perfecta. Pero cuanto mejor filtro pasabajos sea h' , y mejor filtro pasa-altos sea g' , (nos referimos a los 2 filtros de análisis) mejor localizada en frecuencias será la transformada wavelet.

Si h' es un filtro pasa-bajos, entonces

$$\hat{H}(\pi, \pi) = 0,$$

y

$$H(-1, -1) = 0.$$

Si la derivada direccional de $\hat{H}(w)$ en el punto $w = (\pi, \pi)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces el gradiente

$$\nabla \hat{H}(\pi, \pi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{H}}{\partial w_1}(\pi, \pi) \\ \frac{\partial \hat{H}}{\partial w_2}(\pi, \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

lo cual es equivalente a

$$\nabla H(-1, -1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1}(-1, -1) \\ \frac{\partial H}{\partial z_2}(-1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De la misma manera, si la derivada direccional segunda de $\hat{H}(w)$ en los puntos $w = (\pi, \pi)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces el Hessiano

$$\nabla^2 \hat{H}(\pi, \pi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial w_1 \partial w_1}(\pi, \pi) & \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial w_1 \partial w_2}(\pi, \pi) \\ \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial w_2 \partial w_1}(\pi, \pi) & \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial w_2 \partial w_2}(\pi, \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y por lo tanto

$$\nabla^2 H(-1, -1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_1}(-1, -1) & \frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_2}(-1, -1) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z_2 \partial z_1}(-1, -1) & \frac{\partial^2 H}{\partial z_2 \partial z_2}(-1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cuanto mayor sea el número de condiciones que se cumplan, más “achataada” será la respuesta en frecuencias de h' cerca de $w = (\pi, \pi)$, y mejor filtro pasa-bajos será h' .

Si g' es un filtro pasa-altos, entonces

$$\widehat{G}(0,0) = G(1,1) = 0.$$

Si la derivada direccional de $\widehat{G}(w)$ en el punto $w = (0,0)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces el gradiente

$$\nabla \widehat{G}(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{G}}{\partial w_1}(0,0) \\ \frac{\partial \widehat{G}}{\partial w_2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

lo cual es equivalente a

$$\nabla G(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial z_1}(1,1) \\ \frac{\partial G}{\partial z_2}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De la misma manera, si la derivada direccional segunda de $\widehat{G}(w)$ en los puntos $w = (0,0)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces el Hessiano

$$\nabla^2 \widehat{G}(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial w_1 \partial w_1}(0,0) & \frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial w_1 \partial w_2}(0,0) \\ \frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial w_2 \partial w_1}(0,0) & \frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial w_2 \partial w_2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$\nabla^2 G(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial z_1 \partial z_1}(1,1) & \frac{\partial^2 G}{\partial z_1 \partial z_2}(1,1) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial z_2 \partial z_1}(1,1) & \frac{\partial^2 G}{\partial z_2 \partial z_2}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cuanto mayor sea el número de condiciones que se cumplan, más “achataada” será la respuesta en frecuencias de g' cerca de $w = (0,0)$, y mejor filtro pasa-bajos será g' .

3.6 Relaciones entre propiedades

El siguiente teorema, que indica que la cuantización es un proceso estable cuando la transformada es ortonormal, es similar a su versión para las wavelets unidimensionales.

Teorema 3.1. Sea (Φ, Ψ) es un sistema ortonormal, $c_k^{(0)}$ son los coeficientes de la señal original, y se calcula su transformada wavelet de L niveles, obteniéndose los coeficientes $c_k^{(-L)}, d_k^{(-L)}, \dots, d_k^{(-1)}$, tales que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k c_k^{(0)} \Phi(x - k) \\ &= \sum_k c_k^{(-L)} \Phi_{-L,k}(x) + \sum_{j=-L+1}^{-1} \sum_k d_k^{(j)} \Psi_{j,k}(x). \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Phi_{-L,k}(x) &= |D|^{-L/2} \Phi(D^{-L}x - k) \\ \Psi_{j,k}(x) &= |D|^{j/2} \Psi(D^j x - k).\end{aligned}$$

Si se cuantizan los coeficientes, aplicándoles una función de cuantización $Q(x)$ –como por ejemplo el redondeo, o el pasar los coeficientes por un umbral– entonces la señal reconstruida $\tilde{c}_k^{(0)}$, que se obtiene antitransformando, tiene un error cuya norma cuadrática es igual a la de los errores de cuantización:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \sum_k Q(c_k^{(-L)}) \Phi_{-L,k}(x) + \sum_{j=-L+1}^{-1} \sum_k Q(d_k^{(j)}) \Psi_{j,k}(x) \\ &= \sum_k \tilde{c}_k^{(0)} \Phi(x - k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|c^{(0)} - \tilde{c}^{(0)}\|_2 &= \|f - \tilde{f}\|_2 \\ &= \left(\sum_k (c_k^{(-L)} - Q(c_k^{(-L)}))^2 + \sum_{j=-L+1}^{-1} \sum_k (d_k^{(j)} - Q(d_k^{(j)}))^2 \right)^{1/2}\end{aligned}$$

A continuación se demuestra que si hay aproximación polinomial entonces la rama pasa-bajos del esquema de análisis preserva los polinomios discretizados, mientras que la rama pasa-altos los anula.

Teorema 3.2. Sea $\Phi(x_1, x_2)$ con aproximación polinomial de orden m . Si para $k = (k_1, k_2)$, $c_k^{(0)} = p(x_1, x_2)$ es un polinomio de grado $|r| < m$ discretizado en $(k_1 \Delta x_1, k_2 \Delta x_2)$, entonces los coeficientes de aproximación de la transformada wavelet $c_k^{(-1)}$ son otro polinomio de grado r discretizado en

$$((Dk)_1 \Delta x_1, (Dk)_2 \Delta x_2),$$

y los coeficientes de detalle $d_k^{(-1)}$ son nulos.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $p(x_1, x_2) = x_1^{r_1} x_2^{r_2}$. Entonces por hipótesis,

$$c_j^{(0)} = (j_1 \Delta x_1)^{r_1} (j_2 \Delta x_2)^{r_2}, \quad \text{con } j = (j_1, j_2) \quad \text{y } r = r_1 + r_2 < m. \quad (3.20)$$

Si se reemplaza en la fórmula 3.8, resulta

$$c_k^{(-1)} = \frac{(\Delta x_1)^{r_1} (\Delta x_2)^{r_2}}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} h_{(j-Dk)} (j_1)^{r_1} (j_2)^{r_2},$$

y con el cambio de variables $i = (i_1, i_2) = j - Dk$, se obtiene

$$c_k^{(-1)} = \frac{(\Delta x_1)^{r_1} (\Delta x_2)^{r_2}}{\sqrt{|D|}} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} h_i (i_1 + (Dk)_1)^{r_1} (i_2 + (Dk)_2)^{r_2}.$$

A continuación se aplica la fórmula binomial de Newton,

$$c_k^{(-1)} = \frac{(\Delta x_1)^{r_1} (\Delta x_2)^{r_2}}{\sqrt{|D|}} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} h_i \sum_{p=0}^{r_1} \binom{r_1}{p} i_1^p (Dk)_1^{r_1-p} \sum_{q=0}^{r_2} \binom{r_2}{q} i_2^q (Dk)_2^{r_2-q},$$

y por lo tanto

$$c_k^{(-1)} = \frac{(\Delta x_1)^{r_1} (\Delta x_2)^{r_2}}{\sqrt{|D|}} \sum_{p=0}^{r_1} \binom{r_1}{p} (Dk)_1^{r_1-p} \sum_{q=0}^{r_2} \binom{r_2}{q} (Dk)_2^{r_2-q} \sum_{i \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} h_i i_1^p i_2^q.$$

Pero si la última sumatoria se separa según los índices pertenecen a una o otra subgrilla,

$$\sum_{i \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} h_i i_1^p i_2^q = \sum_{i \in \Lambda \cap \Gamma_0} h_i i_1^p i_2^q + \sum_{i \in \Lambda \cap \Gamma_1} h_i i_1^p i_2^q = 2v_{(p,q)}$$

por lo tanto la última sumatoria es una constante que no depende de i , según 3.19 –recordar que $p+q \leq r_1 + r_2 = r < m$. Luego

$$c_k^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{p=0}^{r_1} \binom{r_1}{p} (\Delta x_1)^p [(Dk)_1 \Delta x_1]^{r_1-p} \cdot \sum_{q=0}^{r_2} \binom{r_2}{q} (\Delta x_2)^q [(Dk)_2 \Delta x_2]^{r_2-q} 2v_{(p,q)}$$

es un polinomio de grado r en $((Dk)_1 \Delta x_1, (Dk)_2 \Delta x_2)$ y el término de mayor grado es una constante por

$$[(Dk)_1 \Delta x_1]^{r_1} [(Dk)_2 \Delta x_2]^{r_2}.$$

Veamos ahora que los coeficientes de detalle $d_k^{(-1)}$ son nulos. Si se aplica la fórmula 3.9 a $c^{(0)}$, se obtiene

$$d_k^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} g_{(j-Dk)} (j_1 \Delta x_1)^{r_1} (j_2 \Delta x_2)^{r_2}.$$

Reemplazando los elementos $g_{(j-Dk)}$ por su expresión 3.7, resulta

$$d_k^{(-1)} = \frac{(\Delta x_1)^{r_1} (\Delta x_2)^{r_2}}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} (-1)^\beta h_{(11)-j+Dk} (j_1)^{r_1} (j_2)^{r_2},$$

donde $\beta = j_1 - (Dk)_1 + j_2 - (Dk)_2$. Con el cambio de variables $i = (1, 1) - j + Dk$,

$$i_1 = 1 - j_1 + (Dk)_1,$$

$$i_2 = 1 - j_2 + (Dk)_2,$$

vemos que

$$d_k^{(-1)} = A \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{i_1+i_2} h_i ((Dk)_1 + 1 - i_1)^{r_1} ((Dk)_2 + 1 - i_2)^{r_2},$$

donde

$$A = \frac{(\Delta x_1)^{r_1} (\Delta x_2)^{r_2}}{\sqrt{|D|}}.$$

Observemos que

$$(-1)^\beta = (-1)^{i_1+i_2},$$

porque

$$\begin{aligned}\beta &= j_1 - (Dk)_1 + j_2 - (Dk)_2 \\ &= 2 - i_1 - i_2.\end{aligned}$$

Igual que en el caso anterior, se aplica la fórmula del binomio,

$$\begin{aligned}d_k^{(-1)} &= A \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{i_1+i_2} h_i \sum_{p=0}^{r_1} \binom{r_1}{p} (Dk+1)_1^{r_1-p} (-i_1)^p \\ &\quad \cdot \sum_{q=0}^{r_2} \binom{r_2}{q} (Dk+1)_2^{r_2-q} (-i_2)^q, \\ &= A \sum_{p=0}^{r_1} \binom{r_1}{p} (Dk+1)_1^{r_1-p} \sum_{q=0}^{r_2} \binom{r_2}{q} (Dk+1)_2^{r_2-q} \\ &\quad \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{i_1+i_2} h_i (-i_1)^p (-i_2)^q.\end{aligned}$$

El último término del producto es la suma

$$\begin{aligned}&\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{i_1+i_2} h_i (-i_1)^p (-i_2)^q \\ &= (-1)^{p+q} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{i_1+i_2} h_i (i_1)^p (i_2)^q \\ &= (-1)^{p+q} \left[\sum_{i \in \Lambda \cap \Gamma_0} h_i (i_1)^p (i_2)^q - \sum_{i \in \Lambda \cap \Gamma_1} h_i (i_1)^p (i_2)^q \right] \\ &= (-1)^{p+q} [u_{pq} - u_{pq}] \\ &= 0,\end{aligned}$$

con lo cual $d_k^{(-1)} = 0$. En el curso de la deducción anterior, se separó la sumatoria según las subgrillas. Se usó que

$$(-1)^{i_1+i_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \Gamma_0 \\ -1 & \text{si } i \in \Gamma_1 \end{cases},$$

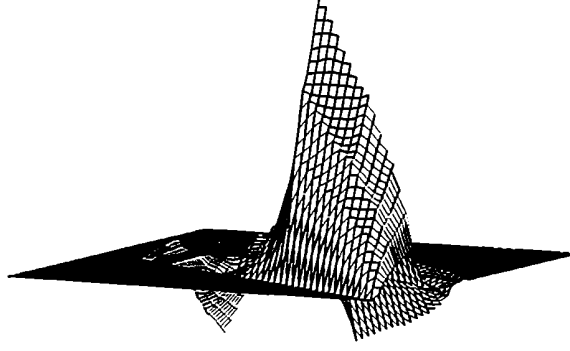
puesto que si $i \in \Gamma_0$, entonces $i = Dl$, por lo tanto

$$\begin{aligned}i_1 + i_2 &= (d_{11}l_1 + d_{12}l_2) + (d_{21}l_1 + d_{22}l_2) \\ &= (d_{11} + d_{21})l_1 + (d_{12} + d_{22})l_2 \\ &= 2l_1\end{aligned}$$

es siempre par. Análogamente, si $i \in \Gamma_1$, entonces $i = Dl + (1, 0)$, y por consiguiente

$$\begin{aligned}i_1 + i_2 &= (d_{11}l_1 + d_{12}l_2 + 1) + (d_{21}l_1 + d_{22}l_2) \\ &= (d_{11} + d_{21})l_1 + (d_{12} + d_{22})l_2 + 1 \\ &= 2l_1 + 1\end{aligned}$$

es siempre impar. Se usó que $p + q \leq r_1 + r_2 = r < m$ y se aplicó 3.19. □

Figura 3.8: Función de escala Daubechies 4 con D_1

Uniendo el resultado anterior a otros teoremas, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.3. Si $\Phi(x)$ es m veces diferenciable con continuidad, son equivalentes:

- $\frac{\partial^k H}{\partial w_1^{k_1} \partial w_2^{k_2}}(-1, -1) = 0$, para $0 \leq |k| < m$.
- $\frac{\partial^k G}{\partial w_1^{k_1} \partial w_2^{k_2}}(1, 1) = 0$, para $0 \leq |k| < m$.
- $\sum_{k \in \Gamma_i} k^r h_k = v_r$, $i = 0, 1$, $|r| = 1, \dots, m-1$ $v_0 = 1$.
- $\Phi(x)$ tiene aproximación polinomial de orden m .
- Los momentos $r = (r_1, r_2)$ de $\Psi(x)$ son nulos, para $0 \leq |r| < m$.
- Si $c_k^{(0)} = p(x_k)$ es un polinomio de grado $|r| < m$ discretizado en x_k , entonces los coeficientes de aproximación de la transformada wavelet $c_k^{(-1)}$ son otro polinomio de grado r discretizado en x_{Dk} , y los coeficientes de detalle $d_k^{(-1)}$ son nulos.

Nota 3.6. En el caso bidimensional, no surge de lo anterior una factorización de \hat{H} .

3.7 Ejemplos

Si se utiliza el filtro h de una función de escala ortogonal en 1 dimensión, y se lo asocia a una matriz de dilatación D_1 o D_2 , se obtiene una función de escala ortogonal, no separable. Por ejemplo, si el filtro es el de Daubechies 4, y la matriz de dilatación es D_1 , se obtiene una función de escala ortogonal, continua, y de aproximación polinomial de orden 2 – ver figura 3.8. La transformada Z de h cumple $H(-1, 1) = 0$.

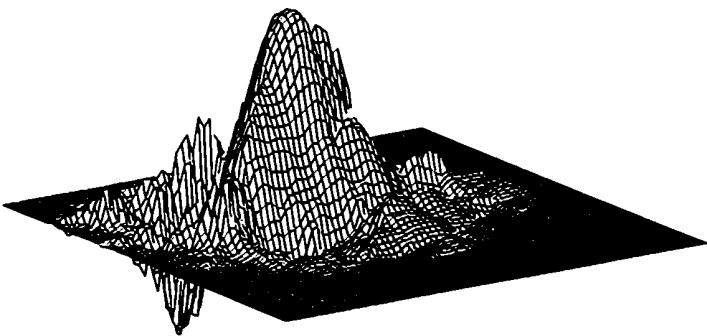


Figura 3.9: Función de escala Kovacevic–Vetterli

Wavelet	figura	aprox. pol.	ρ	s
Daubechies 4 con D_1	3.8	2	0.82644582	0.2750
Kovacevic–Vetterli con D_1	3.9	2	0.93406968	0.0984

Tabla 3.2: Ejemplos de wavelets no separables

Kovacevic y Vetterli [27] han construido ejemplos de funciones de escala y wavelets bidimensionales ortogonales, continuas y no separables. Cohen y Daubechies [28] han construido ejemplos de funciones de escala y wavelets bidimensionales biortogonales, continuas y no separables.

El filtro bidimensional dado en [27] (ecuación 78)

$$h = \begin{bmatrix} 0 & h_{11} & h_{21} & 0 \\ h_{00} & h_{10} & h_{20} & 1 \\ 0 & h_{1,-1} & h_{2,-1} & 0 \end{bmatrix}$$
$$h = \begin{bmatrix} 0 & 1.7320508076 & -3 & 0 \\ -3.7320508076 & 6.4641016151 & 1.7320508076 & 1 \\ 0 & 11.196152423 & 6.4641016151 & 0 \end{bmatrix},$$

asociado a la matriz de dilatación D_1 , también corresponde a una función de escala ortogonal, no separable, continua, de aproximación polinomial de orden 2, – ver figura 3.9

En la tabla 3.2 se dan estimaciones del radio espectral conjunto, y del exponente de Hölder de las funciones de escala mencionadas.

3.8 Matrices de dilatación (2)

No es deseable que al procesar una imagen se introduzcan distorsiones en ella. Y vimos como el submuestreo y el sobremuestreo están determinados por la matriz D : por eso es necesario que esta matriz sea una dilatación del plano en una norma que corresponda a nuestra noción de distancia en el plano, es decir, la norma euclídea. Por consiguiente, D^{-1} debe ser una contracción del plano en norma euclídea. Veremos que esto se cumple si los valores singulares de D son mayores que 1.

Lema 3.1. Si los valores singulares de D verifican $\sigma_k > 1$ para $k = 1, 2$, entonces D es una dilatación del plano en norma euclídea, y D^{-1} es una contracción del plano en la misma norma.

Demostración. Por la descomposición en valores singulares de la matriz D , existen 2 matrices ortogonales U y F de 2×2 tales que

$$U^T D F = S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix},$$

donde

$$\sigma_k = \sqrt{\lambda(D^T D)},$$

y

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 > 1$$

por hipótesis. Entonces

$$D = U S F^T,$$

y

$$D^{-1} = F S^{-1} U^T,$$

con lo cual

$$\|D^{-1}\|_2 = \max_k \frac{1}{\sigma_k} = \frac{1}{\sigma_2} < 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \|D^{-1} D x\|_2 \leq \|D^{-1}\|_2 \|D x\|_2, \\ \sigma_2 \|x\|_2 &= \|D^{-1}\|_2^{-1} \|x\|_2 \leq \|D x\|_2 \end{aligned}$$

y D es una dilatación del plano en norma euclídea. Además,

$$\|D^{-1} x\|_2 \leq \|D^{-1}\|_2 \|x\|_2 = \frac{1}{\sigma_2} \|x\|_2,$$

y D^{-1} es una contracción del plano en norma euclídea. □

Demostraremos a continuación que si los valores singulares de una matriz real A son mayores que 1, entonces sus autovalores también son mayores que 1 en valor absoluto.

Lema 3.2. Sean λ_k los autovalores de una matriz real A de $n \times n$, y σ_k sus valores singulares. Si $\sigma_k > 1 \forall k$ entonces $|\lambda_k| > 1 \forall k$.

Demostración. Como $A^T A$ es una matriz simétrica definida positiva, el cociente de Rayleigh verifica:

$$\frac{x^T A^T A x}{x^T x} \geq \sigma_m^2 \quad \forall x \tag{3.21}$$

donde σ_m^2 es el autovalor más pequeño de $A^T A$, y por hipótesis $\sigma_m^2 > 1$. Sea x el autovector de A asociado a λ_k , y reemplazando en la ecuación (3.21), se obtiene $\lambda_k^2 > 1$. Luego $|\lambda_k| > 1 \forall k$. □

Mat. de dilatación	Det	autovalores	valores singulares
D_3	2	$\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 1$	$\sigma_1 = 2.28824561$ $\sigma_2 = 0.874032$

Tabla 3.3: Propiedades de D_3

Nota 3.7. La inversa no es válida; por ejemplo la matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 3.0 & -0.6 \end{bmatrix}$$

tiene autovalores $\lambda = \pm 1.122497216032182$, y sus valores singulares son

$$\sigma_1 = 3.105704986607944, \sigma_2 = 0.4057049866079438.$$

Con este ejemplo se evidencia que no alcanza con que los autovalores de la matriz sean mayores que 1 en módulo para que la matriz sea una expansión en norma 2: si

$$x = [0.2 \quad 0.9]^T \quad A_1 x = [0.39 \quad 0.06]^T$$

resulta que $\|A_1 x\|_2 = 0.3946 < \|x\|_2 = 0.922$.

Como consecuencia del lema, si los valores singulares de la matriz de dilatación D son mayores que 1, entonces los autovalores de D verifican $|\lambda_k| > 1$.

Veamos ahora el caso de la matriz

$$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que da origen a la mismas subgrillas que D_1 y D_2 . Sus coeficientes son enteros, sus autovalores en valor absoluto son mayores o iguales que 1, pero tiene un valor singular menor que 1 (ver tabla 3.3).

De la descomposición en valores singulares, se tienen U y F , matrices ortogonales, y S , matriz diagonal, tal que

$$U^T D_3 F = S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}, \text{ donde}$$

$$U^T = \begin{bmatrix} 0.973248989 & 0.22975292 \\ -0.22975292 & 0.973248989 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.850650808 & -0.525731112 \\ 0.525731112 & 0.850650808 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2.28824561 & 0 \\ 0 & 0.874032 \end{bmatrix}$$

Para $e_2 = [0 \quad 1]^T$ el segundo vector de la base canónica,

$$S e_2 = \sigma_2 e_2$$

es una contracción, y como

$$D_3 F e_2 = U S e_2 = \sigma_2 U e_2,$$

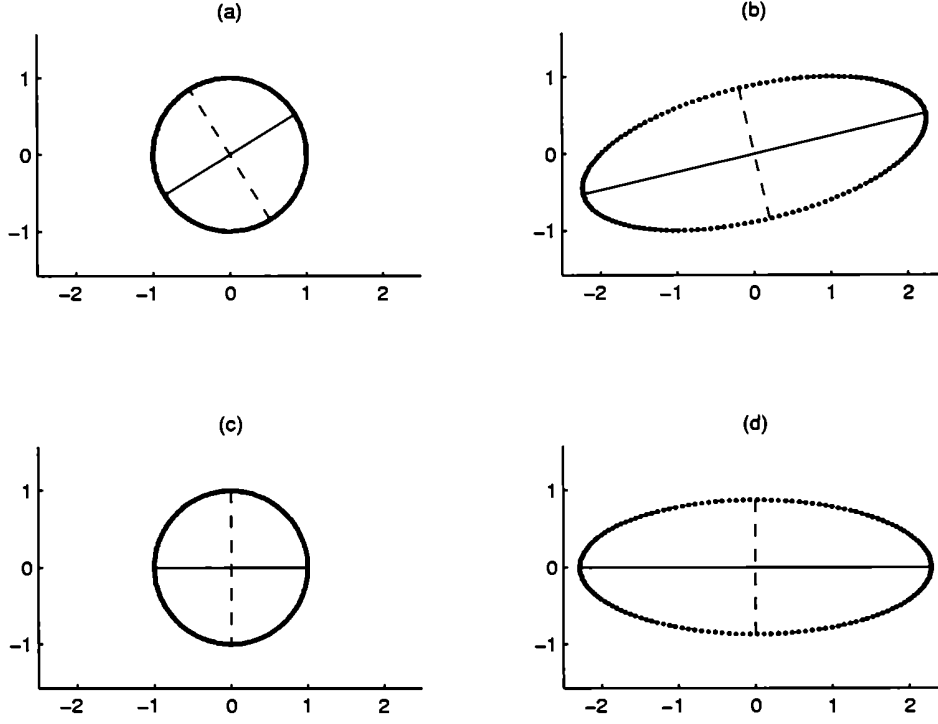


Figura 3.10: (a) $X = \{\|x\|_2 = 1\}$ (c) $F^T X$ (d) $SF^T X$ (b) $ESF^T X = DX$

entonces existe una dirección dada por $F e_2$ en la cual la matriz D_3 no es una expansión, sino una contracción:

$$\|F e_2\|_2 = 1,$$

por ser F una matriz ortogonal, y

$$\|D_3 F e_2\|_2 = \|\sigma_2 U e_2\|_2 = \sigma_2 \|U e_2\|_2 = \sigma_2 < 1.$$

En la figura 3.10 se tiene el diagrama conmutativo de la imagen de la circunferencia de radio 1 por D_3 . En (a) se observa con línea punteada la dirección de $F e_2$, y en (b) se observa con línea punteada la dirección de

$$D_3 F e_2 = \sigma_2 U e_2.$$

Al procesar una imagen, cuando se realiza la decimación o submuestreo, se espera que la imagen se contraiga en todas las direcciones. Sin embargo, en este caso la imagen transformada se estira en la dirección $U e_2$, pues

$$D_3^{-1} U e_2 = \frac{1}{\sigma_2} F e_2$$

-ver figura 3.11, mientras que en la dirección $U e_1$ - donde $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ - correspondiente al eje de línea llena en (b), la imagen se reduce a más de la mitad:

$$D_3^{-1} U e_1 = \frac{1}{\sigma_1} F e_1.$$

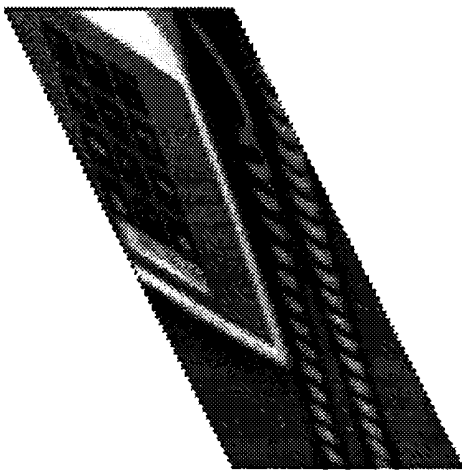


Figura 3.11: Teléfono submuestreado con D_3 .

Mat. de dilatación	Det	autovalores	valores singulares
D_4	-2	$\lambda_1 = \sqrt{2}$ $\lambda_2 = -\sqrt{2}$	$\sigma_1 = 2$ $\sigma_2 = 1$

Tabla 3.4: Propiedades de D_4

Estas distorsiones no ocurren cuando $\sigma_1 > 1$ y $\sigma_2 > 1$.

Nota 3.8. Belogay y Wang [26] hallaron ejemplos de wavelets ortogonales no separables asociadas a la matriz de dilatación

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz se origina una sola submatriz de detalle en cada paso. La decimación D_4 equivale a eliminar las columnas impares de la imagen, y luego espejarla con el eje de simetría $y = x$. En cada paso la decimación se hace en una sola dirección, lo cual distorsiona la imagen, aunque cada 2 pasos vuelve a tomar sus proporciones originales.

$$\begin{matrix} \times & 0 & \times & 0 & \times \\ \times & 0 & \times & 0 & \times \\ \times & 0 & \times & 0 & \times \end{matrix}$$

La subgrillas generadas por esta matriz – llamada subgrillas columna – no son iguales a las subgrillas diagonales (al tresbolillo). De la observación de los valores singulares vemos que la matriz D_4 dilata el plano en todas las direcciones salvo en la del eje horizontal.

Capítulo 4

Multiwavelets en una dimensión

Las multiwavelets son una generalización de las wavelets. Los espacios V_j , en los cuales se proyecta la función asociada a la señal original, son generados por las traslaciones enteras de dilataciones de 2 o más funciones de escala. El hecho de considerar varias funciones de escala – en vez de una sola – permite diseñar multifunciones de escala que tengan un conjunto de propiedades útiles, como por ejemplo aproximación polinomial de orden > 1 , ortogonalidad y simetría, que no se pueden dar en las funciones de escala unidimensionales. Por ejemplo, Geronimo, Hardin y Massopust diseñaron una multifunción de escala de soporte pequeño, que tiene orden de aproximación polinomial 2, y que es, a la vez, ortogonal y simétrica [29]: ver las 2 funciones de escala y las wavelets asociadas en la figura 4.1. Para el diseño de multiwavelets consultar [30], [31], [32], [33] [34], y [35].

Las multiwavelets han dado buenos resultados en cuanto a la compresión de señales –ver [36], [37], [38] y [39]–. Debido a que esta transformada explota las correlaciones entre las señales de entrada, son indicadas para procesar imágenes multitemporales, o de color. En el procesamiento de señales con dos funciones de escala se tienen 2 señales de entrada, y 4 señales de salida: 2 de aproximación y 2 de detalle. Antes de aplicar la transformada, los datos deben ser prefiltrados, a menos que las multiwavelets sean balanceadas [40] [41].

Algunos temas, como la estimación del exponente Hölder de continuidad de las funciones construídas, así como el algoritmo cascada, que permite graficar las multifunciones de escala y las multiwavelets, se tratarán más adelante en su forma más general (ver el capítulo 8.6 y el algoritmo 7.3).

4.1 Definiciones y notación

- Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = [f_1, f_2]^T$ donde $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, se define la *transformada Fourier* de f como

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$$
$$\hat{f}(w) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-iwx} dx, \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-iwx} dx \right]^T.$$

- Dado $H = \{H^{(0)}, H^{(1)}, H^{(3)}, \dots\}$ un conjunto de matrices $H^{(k)}$ de 2×2 , con $k \in \{0, 1, \dots, N\}$,

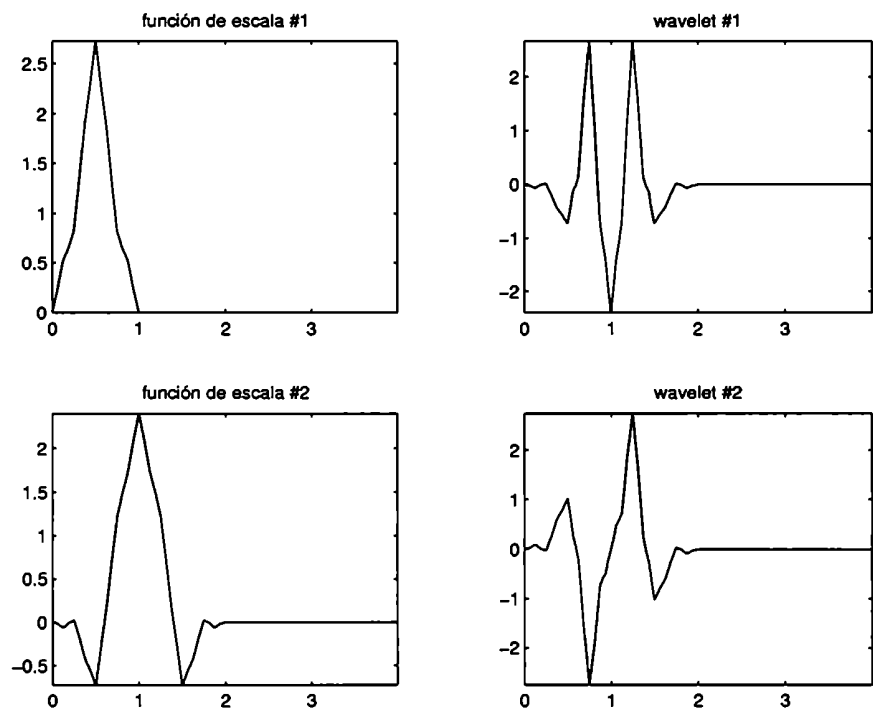


Figura 4.1: Multifunción de escala y multiwavelet GHM.

definimos la *transformada Z* de H como

$$H(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^N H^{(k)} z^{-k}.$$

Nota 4.1. A las matrices $H^{(k)}$ las llamaremos matrices-filtro.

• Dado H un conjunto de matrices $H^{(k)}$ de 2×2 , con $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, definimos su *respuesta en frecuencias*, o transformada Fourier discreta en el tiempo, como

$$\hat{H} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$\hat{H}(w) = \sum_{k=0}^N H^{(k)} e^{-ikw}$$

• Dado H un conjunto de matrices $H^{(k)}$ de 2×2 , con $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, se define el símbolo

$$\tilde{H}(w) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N H^{(k)} e^{-ikw} = \frac{\hat{H}(w)}{2}.$$

• Dado H un conjunto de matrices $H^{(k)}$ de 2×2 , con $k \in \Lambda = \{0, 1, \dots, N\}$. Para $i = 0, 1$ llamamos $S_i^{(j)}$ a la suma

$$S_i^{(j)} = \sum_{k \in \Gamma_i \cap \Lambda} k^j H^{(k)},$$

y $S^{(j)}$ a la suma

$$S^{(j)} = S_0^{(j)} + S_1^{(j)}.$$

Recordemos que $\Gamma_0 = 2\mathbb{Z}$ es el conjunto de todos los enteros pares, y $\Gamma_1 = 2\mathbb{Z} + 1$ es el conjunto de todos los enteros impares.

Por ejemplo:

$$S_i^{(0)} = \sum_{k \in \Gamma_i \cap \Lambda} H^{(k)} \quad S_i^{(1)} = \sum_{k \in \Gamma_i \cap \Lambda} k H^{(k)} \quad S_i^{(2)} = \sum_{k \in \Gamma_i \cap \Lambda} k^2 H^{(k)}.$$

$S_0^{(0)}$ es la suma de las matrices $H^{(k)}$ con índice par, y $S_1^{(0)}$ es la suma de las matrices $H^{(k)}$ con índice impar; y

$$S^{(0)} = S_0^{(0)} + S_1^{(0)} = \sum_{k=0}^N H^{(k)}$$

es la suma de todas la matrices $H^{(k)}$.

• De manera análoga definimos $T^{(0)}$ como la suma de todas las matrices $G^{(k)}$.

$$T^{(0)} = \sum_{k=0}^N G^{(k)}$$

- Dados p números r_0, r_1, \dots, r_{p-1} , con $r_0 = 1$, la secuencia de polinomios $\rho_0(t), \rho_1(t), \dots, \rho_{p-1}(t)$

$$\rho_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_{n-k} t^k$$

se denomina secuencia de Appell.

4.2 Análisis de multirresolución para multiwavelets en 1d

Igual que en el caso de las wavelets en una dimensión, en el caso de las multiwavelets un análisis de multirresolución consiste en una secuencia de subespacios anidados

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

cuya unión es densa en $L^2(\mathbb{R})$ y cuya intersección es la función nula. El subespacio V_0 es el subespacio generado por las traslaciones enteras de 2 o más funciones de escala. Si V_0 es generado por las traslaciones enteras de r funciones de escala: $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r$, se dice que el análisis de multirresolución tiene multiplicidad r .

Nos restringiremos al caso $r = 2$, es decir, V_0 es el subespacio generado por las traslaciones enteras de dos funciones de escala, Φ_1 y Φ_2 definidas sobre \mathbb{R}

$$V_0 = \overline{\text{gen}\{\Phi_1(x - k_1), \Phi_2(x - k_2)\}}_k, \quad \text{donde } k = (k_1, k_2).$$

Al par (Φ_1, Φ_2) se lo denomina multifunción de escala.

Los demás subespacios V_j son generados por las traslaciones enteras de una versión dilatada o contraída de Φ_1 y Φ_2 :

$$V_j = \overline{\text{gen}\{\Phi_1(2^j x - k_1), \Phi_2(2^j x - k_2)\}}_k, \quad \text{donde } k = (k_1, k_2).$$

De la inclusión $V_0 \subset V_1$ se deduce que $\Phi_1(x)$, que es base de V_0 , debe poder expresarse como combinación de las bases de V_1 . Entonces deben existir constantes $H_{11}^{(k)}$ y $H_{12}^{(k)}$ tales que:

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=0}^N \left\{ H_{11}^{(k)} \Phi_1(2x - k) + H_{12}^{(k)} \Phi_2(2x - k) \right\}, \quad (4.1)$$

y como la observación también vale para $\Phi_2(x)$, existen constantes $H_{21}^{(k)}$ y $H_{22}^{(k)}$ tales que

$$\Phi_2(x) = \sum_{k=0}^N \left\{ H_{21}^{(k)} \Phi_1(2x - k) + H_{22}^{(k)} \Phi_2(2x - k) \right\}. \quad (4.2)$$

Si escribimos estas ecuaciones en forma vectorial, obtenemos la siguiente ecuación, llamada ecuación de dilatación o de refinamiento

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^N [H^{(k)}] \begin{bmatrix} \Phi_1(2x - k) \\ \Phi_2(2x - k) \end{bmatrix},$$

y en forma más abreviada:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \Phi(x) &= \sum_{k=0}^N H^{(k)} \Phi(2x - k), \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde las $H^{(k)}$ son matrices de 2×2 .

Nos limitaremos a considerar las multifunciones de escala ortogonales, es decir, aquellas para las cuales la familia $\{\Phi_1(x-k), \Phi_2(x-l)\}$ es ortonormal. Para cada entero j , W_j es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Los subespacios W_j son generados por las traslaciones enteras de versiones dilatadas de dos funciones $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$, llamadas wavelets -y al par $\{\Psi_1, \Psi_2\}$ se lo denomina multiwavelet-

$$W_j = \text{gen}\{\Psi_1(2^j x - k_1), \Psi_2(2^j x - k_2)\}_k.$$

De la inclusión $W_0 \subset V_1$ se deduce que $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$, que son bases de W_0 , deben poder expresarse como combinación de las bases de V_1 . Entonces deben existir constantes $G_{11}^{(k)}$ y $G_{12}^{(k)}$, $G_{21}^{(k)}$ y $G_{22}^{(k)}$ tales que

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^N [G^{(k)}] \begin{bmatrix} \Phi_1(2x-k) \\ \Phi_2(2x-k) \end{bmatrix},$$

es decir,

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^N G^{(k)} \Phi(2x-k), \quad (4.4)$$

conocida como la ecuación de la wavelet. Para el cálculo de las matrices $G^{(k)}$ se utiliza un algoritmo de extensión matricial, detallado en [42].

4.3 Procesamiento de señales

Al trabajar con 2 multiwavelets, que es equivalente a trabajar con un banco de filtros de 2 entradas, se debe descomponer la señal original $X^{(0)}$ en 2 señales $c_{1,k}^{(0)}$ y $c_{2,k}^{(0)}$ ($k \in Z$). Sea $f(x)$ la función cuyas componentes en las bases $\{\Phi_1(x-k)\}$ y $\{\Phi_2(x-k)\}$ son, respectivamente, $c_{1,k}^{(0)}$ y $c_{2,k}^{(0)}$:

$$f \in V_0 = \text{span}\{\Phi_1(\cdot-k), \Phi_2(\cdot-l)\}_{k,l \in Z}$$

$$f(x) = \sum_{k \in Z} c_{1,k}^{(0)} \Phi_1(x-k) + c_{2,k}^{(0)} \Phi_2(x-k)$$

Esto, escrito en forma más resumida, se convierte en

$$f(x) = \sum_{k \in Z} (c_{\cdot,k}^{(0)})^T \Phi(x-k), \quad \text{donde } c_{\cdot,k}^{(0)} = \begin{bmatrix} c_{1,k}^{(0)} \\ c_{2,k}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

El esquema de análisis (ver la figura 4.2) tiene a las señales $c_{1,k}^{(0)}$, $c_{2,k}^{(0)}$ como datos de entrada, y en la salida de la rama pasa-bajos del esquema se obtienen 2 sucesiones de coeficientes de aproximación: $c_{1,k}^{(-1)}$, $c_{2,k}^{(-1)}$, y en la rama pasa-altos del esquema se obtienen 2 sucesiones de coeficientes de detalle: $d_{1,k}^{(-1)}$ y $d_{2,k}^{(-1)}$. En forma vectorial, son

$$c_{\cdot,k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} c_{1,k}^{(-1)} \\ c_{2,k}^{(-1)} \end{bmatrix} \quad d_{\cdot,k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} d_{1,k}^{(-1)} \\ d_{2,k}^{(-1)} \end{bmatrix}.$$

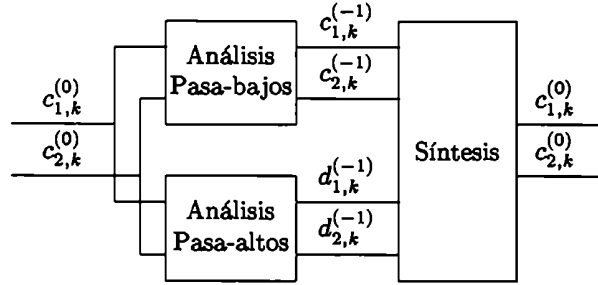


Figura 4.2: Esquema de análisis-síntesis.

Sea

$$V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1} \quad V_{-1} \perp W_{-1}, \text{ donde}$$

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \Phi_1\left(\frac{\cdot}{2} - k\right), \Phi_2\left(\frac{\cdot}{2} - l\right) \right\}_{k,l \in \mathbb{Z}}$$

$$W_{-1} = \text{span} \left\{ \Psi_1\left(\frac{\cdot}{2} - k\right), \Psi_2\left(\frac{\cdot}{2} - l\right) \right\}_{k,l \in \mathbb{Z}}.$$

Si escribimos $f(x)$ como la suma de sus proyecciones sobre V_{-1} y W_{-1} :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{\cdot,k}^{(-1)T} \Phi\left(\frac{x}{2} - k\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{\cdot,k}^{(-1)T} \Psi\left(\frac{x}{2} - k\right), \end{aligned}$$

se puede demostrar que se cumplen las siguientes fórmulas de análisis:

$$c_{\cdot,k}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} H^{(j-2k)} c_{\cdot,j}^{(0)} \quad (4.5)$$

$$d_{\cdot,k}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} G^{(j-2k)} c_{\cdot,j}^{(0)}. \quad (4.6)$$

Un paso de la transformada multiwavelet consiste en obtener $c_{\cdot,k}^{(-1)}$ y $d_{\cdot,k}^{(-1)}$ a partir de $c_{\cdot,k}^{(0)}$.

De manera análoga se obtiene la fórmula de síntesis:

$$c_{\cdot,k}^{(0)} = U_{\cdot,k} + V_{\cdot,k}, \quad (4.7)$$

donde $U_{\cdot,k}$ es la rama pasa-bajos del operador de síntesis, y $V_{\cdot,k}$ es la rama pasa-altos del operador de síntesis:

$$U_{\cdot,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(H^{(k-2j)} \right)^T c_{\cdot,j}^{(-1)}, \quad (4.8)$$

$$V_{\cdot,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(G^{(k-2j)} \right)^T d_{\cdot,j}^{(-1)}. \quad (4.9)$$

Un segundo paso de la transformada multiwavelet consiste en aplicar las fórmulas 4.5 y 4.6 a los coeficientes $c_{\cdot,k}^{(-1)}$, obteniéndose los coeficientes $c_{\cdot,k}^{(-2)}$ y $d_{\cdot,k}^{(-2)}$, y la función $f(x)$ se escribe entonces como

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[c_{\cdot,k}^{(-2)} \right]^T \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{x}{4} - k \right) + \sum_{j=1}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[d_{\cdot,k}^{(-j)} \right]^T \frac{1}{(\sqrt{2})^j} \Psi \left(\frac{x}{2^j} - k \right).$$

Las fórmulas de análisis (4.5) y (4.6) no pueden interpretarse como una convolución seguida de un submuestreo, como en el caso de una sola función de escala: no hay convolución, puesto que el producto es un producto matricial, y el índice sobre el cual se opera es el índice de las matrices filtro. Daremos 2 formas equivalentes de esta fórmula.

Los coeficientes de aproximación en la fórmula (4.5) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} c_{1,\cdot}^{(-1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(H'_{11}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(H'_{12}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right] \downarrow 2 \\ c_{2,\cdot}^{(-1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(H'_{21}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(H'_{22}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right] \downarrow 2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $H'(\cdot) = H^{(-\cdot)}$. Entonces tenemos que $c_{1,\cdot}^{(-1)}$ es la suma de convoluciones de las 2 señales de entrada $c_{1,\cdot}^{(0)}$ y $c_{2,\cdot}^{(0)}$ respectivamente con los elementos (1,1) y (1,2) de las matrices filtro $H'(\cdot)$, seguida de un submuestreo de a 2. Análogamente, $c_{2,\cdot}^{(-1)}$ es la suma de convoluciones de las 2 señales de entrada $c_{1,\cdot}^{(0)}$ y $c_{2,\cdot}^{(0)}$ respectivamente con los elementos (2,1) y (2,2) de las matrices filtro $H'(\cdot)$, seguida de un submuestreo de a 2. La misma observación vale para los coeficientes de detalle en la fórmula (4.6), que pueden escribirse como

$$\begin{aligned} d_{1,\cdot}^{(-1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(G'_{11}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(G'_{12}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right] \downarrow 2 \\ d_{2,\cdot}^{(-1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(G'_{21}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(G'_{22}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right] \downarrow 2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $G'(\cdot) = G^{(-\cdot)}$.

4.3.1 Descomposición de la señal en 2 señales de entrada

Para obtener 2 señales de entrada $c_{1,\cdot}^{(0)}$ y $c_{2,\cdot}^{(0)}$ a partir de la señal original $X^{(0)}$, se puede proceder de dos maneras. (i) Se toma la señal repetida, $c_{1,\cdot}^{(0)} = c_{2,\cdot}^{(0)} = X^{(0)}$, obteniéndose 2 señales del mismo tamaño que la original. Este método no es recomendable si se quiere comprimir la señal. (ii) Se obtienen 2 señales cuyo tamaño es la mitad que el de la señal original: esto se llama muestreo crítico, porque no sobran muestras de la señal. Se realiza mediante un procedimiento llamado prefiltrado, que consiste en resolver el sistema lineal (ver, por ejemplo, [43]):

$$X_n^{(0)} = f(x_n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{1,k}^{(0)} \Phi_1(x_n - k) + c_{2,k}^{(0)} \Phi_2(x_n - k)$$

Varias modificaciones se han propuesto para mejorar el prefiltrado, ver [44], [45], [46], [47], [48]. La necesidad del prefiltrado surge de un cierto desequilibrio que se observa al procesar señales constantes, en el caso en que las integrales de Φ_1 y de Φ_2 no son iguales: en ese caso, al procesar 2 señales constantes

e idénticas, se obtiene en los coeficientes de aproximación 2 señales constantes, pero diferentes. Para subsanar este inconveniente se realiza el paso previo de prefiltrado de la señal, lo cual insume mucho tiempo de procesamiento.

Para evitar el paso del prefiltrado, Lebrun y Vetterli diseñaron multiwavelets balanceadas [40], las cuales dan coeficientes de aproximación constantes e idénticos al procesar 2 señales constantes e idénticas. Pero aún permanecía el problema de dividir la señal original en 2 señales de entrada. Como en la fórmula de análisis se mezcla la información de las 2 señales de entrada – este problema no existe en el caso de una sola wavelet – es preciso que $c_{1,\cdot}^{(0)}$ y $c_{2,\cdot}^{(0)}$ sean similares. Por eso en general se optó por tomar $c_{1,\cdot}^{(0)}$ como los valores pares de la señal $X^{(0)}$ y $c_{2,\cdot}^{(0)}$ como los valores impares de la señal

$$\begin{aligned} c_{1,\cdot}^{(0)} &= X^{(0)} \downarrow 2 \\ c_{2,\cdot}^{(0)} &= (X^{(0)} * \partial_{-1}) \downarrow 2. \end{aligned}$$

Escribiendo esto en términos de la transformada Z , se tiene entonces que

$$X^{(0)}(z) = c_{1,\cdot}^{(0)}(z^2) + z^{-1} c_{2,\cdot}^{(0)}(z^2)$$

y

$$\begin{aligned} c_{1,\cdot}^{(0)}(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} X_{2j}^{(0)} z^{-j} \\ c_{2,\cdot}^{(0)}(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} X_{2j+1}^{(0)} z^{-j}. \end{aligned}$$

Con esta descomposición de la señal original en pares o impares, es decir, según sus fases, se obtiene otra interpretación de las fórmulas de análisis. Un banco de matrices-filtro de 2×2 es también la matriz polifase de 2 filtros (ver [49]). Podemos escribir (4.10) como

$$c_{1,\cdot}^{(-1)} = [y_{1,\cdot}] \downarrow 2 \quad c_{2,\cdot}^{(-1)} = [y_{2,\cdot}] \downarrow 2, \quad (4.12)$$

donde

$$\begin{aligned} y_{1,\cdot} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(H_{11}^{(\cdot)} * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(H_{12}^{(\cdot)} * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right], \\ y_{2,\cdot} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(H_{21}^{(\cdot)} * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(H_{22}^{(\cdot)} * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, las transformadas Z de $y_{1,\cdot}$, $y_{2,\cdot}$ cumplen

$$\begin{bmatrix} y_{1,\cdot}(z) \\ y_{2,\cdot}(z) \end{bmatrix} = P_{F_1, F_2} \begin{bmatrix} c_{1,\cdot}^{(0)}(z) \\ c_{2,\cdot}^{(0)}(z) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

donde

$$P_{F_1, F_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_{11}^{(\cdot)}(\frac{1}{z}) & H_{12}^{(\cdot)}(\frac{1}{z}) \\ H_{21}^{(\cdot)}(\frac{1}{z}) & H_{22}^{(\cdot)}(\frac{1}{z}) \end{bmatrix}$$

es la matriz polifase de 2 filtros F_1 y F_2 . El filtro F_1 tiene coeficientes $H_{11}^{(\cdot)}$ en los índices pares y coeficientes $H_{12}^{(\cdot)}$ en los índices impares, mientras que el filtro F_2 tiene coeficientes $H_{21}^{(\cdot)}$ en los pares y coeficientes $H_{22}^{(\cdot)}$ en los impares. Escribiendo esto último, tenemos

$$\begin{aligned} F_1(z) &= H_{11}^{(\cdot)}(z^2) + z^{-1} H_{12}^{(\cdot)}(z^2) \\ F_2(z) &= H_{21}^{(\cdot)}(z^2) + z^{-1} H_{22}^{(\cdot)}(z^2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Además, la ecuación 4.13 es equivalente a

$$y_{1,\cdot} = (X^{(0)} * F'_1) \downarrow 2 \quad y_{2,\cdot} = (X^{(0)} * F'_2) \downarrow 2.$$

Reemplazando en la fórmulas 4.12, se obtienen los coeficientes de aproximación $c_{1,\cdot}^{(-1)}$ y $c_{2,\cdot}^{(-1)}$ a partir de una convolución de la señal original con los filtros F'_1 y F'_2 , seguida de un submuestreo de a 4:

$$\begin{aligned} c_{1,\cdot}^{(-1)} &= [X^{(0)} * F'_1] \downarrow 4, \\ c_{2,\cdot}^{(-1)} &= [X^{(0)} * F'_2] \downarrow 4. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Análogamente, podemos escribir (4.11) como

$$d_{1,\cdot}^{(-1)} = [u_{1,\cdot}] \downarrow 2 \quad d_{2,\cdot}^{(-1)} = [u_{2,\cdot}] \downarrow 2, \quad (4.16)$$

donde

$$\begin{aligned} u_{1,\cdot} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(G'_{11}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(G'_{12}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right], \\ u_{2,\cdot} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(G'_{21}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(G'_{22}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, las transformadas Z de $u_{1,\cdot}$, $u_{2,\cdot}$ cumplen

$$\begin{bmatrix} u_{1,\cdot}(z) \\ u_{2,\cdot}(z) \end{bmatrix} = P_{I_1, I_2} \begin{bmatrix} c_{1,\cdot}^{(0)}(z) \\ c_{2,\cdot}^{(0)}(z) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

donde

$$P_{I_1, I_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} G_{11}^{(\cdot)}(\frac{1}{2}) & G_{12}^{(\cdot)}(\frac{1}{2}) \\ G_{21}^{(\cdot)}(\frac{1}{2}) & G_{22}^{(\cdot)}(\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

es la matriz polifase de 2 filtros I_1 y I_2 . El filtro I_1 tiene coeficientes G_{11} en los pares y coeficientes G_{12} en los impares, mientras que el filtro I_2 tiene coeficientes G_{21} en los pares y coeficientes G_{22} en los impares. Escribiendo esto último, tenemos

$$\begin{aligned} I_1(z) &= G_{11}^{(\cdot)}(z^2) + z^{-1} G_{12}^{(\cdot)}(z^2), \\ I_2(z) &= G_{21}^{(\cdot)}(z^2) + z^{-1} G_{22}^{(\cdot)}(z^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Además, la ecuación 4.17 es equivalente a

$$x_{1,\cdot} = (X^{(0)} * I'_1) \downarrow 2 \quad x_{2,\cdot} = (X^{(0)} * I'_2) \downarrow 2.$$

Reemplazando en la fórmulas 4.16, se obtienen los coeficientes de detalle $d_{1,\cdot}^{(-1)}$ y $d_{2,\cdot}^{(-1)}$ a partir de una convolución de la señal original con los filtros I'_1 y I'_2 , seguida de un submuestreo de a 4.

$$\begin{aligned} d_{1,\cdot}^{(-1)} &= [X^{(0)} * I'_1] \downarrow 4, \\ d_{2,\cdot}^{(-1)} &= [X^{(0)} * I'_2] \downarrow 4. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nota 4.2. Hemos escrito las fórmulas de análisis, que permiten calcular los coeficientes de aproximación $c_{1,\cdot}^{(-1)}$ y $c_{2,\cdot}^{(-1)}$ y los coeficientes de detalle $d_{1,\cdot}^{(-1)}$ y $d_{2,\cdot}^{(-1)}$, de 3 maneras diferentes:

1. como productos de las matrices filtro por vectores: ecuaciones 4.5 y 4.6,
2. como la suma de 2 convoluciones seguidas de un submuestreo: ecuaciones 4.10 y 4.11,
3. como una convolución de la señal original seguida de un submuestreo de a 4: ecuaciones 4.15 y 4.19.

En la segunda opción, para calcular los coeficientes de aproximación, se opera con los reversos de 4 filtros distintos, los $H_{ij}^{(\cdot)}$. Cada filtro está formado por los elementos de $H^{(k)}$ que están en una misma posición: por ejemplo,

$$H_{11}^{(\cdot)} = [H_{11}^{(0)}, H_{11}^{(1)}, H_{11}^{(2)}, \dots]$$

es un filtro.

En la tercera opción, para calcular los coeficientes de aproximación, se opera con los reversos de 2 filtros distintos, F_1 y F_2 , llamados filtros polifase. Cada filtro está formado por los elementos que están en una misma fila de las matrices $H^{(k)}$: por ejemplo

$$F_1 = [H_{11}^{(0)}, H_{12}^{(0)}, H_{11}^{(1)}, H_{12}^{(1)}, \dots]$$

es un filtro.

4.4 Propiedades de las multiwavelets en 1 dimensión

Mostraremos como las propiedades exigidas a las multifunciones de escala se traducen en condiciones sobre las matrices $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$, y sobre los autovalores y los autovectores de $S_1^{(0)}$, $S_2^{(0)}$ y $S^{(0)}$.

4.4.1 Existencia de la función de escala

Forma Fourier de la ecuación de dilatación:

Si se transforma Fourier las ecuaciones de dilatación 4.1 y 4.2, resulta

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1(w) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N e^{-i w k / 2} \left[H_{11}^{(k)} \hat{\Phi}_1\left(\frac{w}{2}\right) + H_{12}^{(k)} \hat{\Phi}_2\left(\frac{w}{2}\right) \right] \\ \hat{\Phi}_2(w) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N e^{-i w k / 2} \left[H_{21}^{(k)} \hat{\Phi}_1\left(\frac{w}{2}\right) + H_{22}^{(k)} \hat{\Phi}_2\left(\frac{w}{2}\right) \right] \\ \hat{\Phi}(w) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^N e^{-i w k / 2} H^{(k)} \right] \hat{\Phi}\left(\frac{w}{2}\right) = \tilde{H}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= \tilde{H}\left(\frac{w}{2}\right) \tilde{H}\left(\frac{w}{4}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{w}{4}\right) = \dots \\ &= \left\{ \prod_{n=1}^M \tilde{H}\left(\frac{w}{2^n}\right) \right\} \hat{\Phi}\left(\frac{w}{2^M}\right)\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $M \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\hat{\Phi}(w) = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \tilde{H}\left(\frac{w}{2^n}\right) \right\} \cdot \hat{\Phi}(0)$$

Este producto infinito de matrices, multiplicado por el vector $\hat{\Phi}(0)$, debe ser convergente.

Si $w = 0$,

$$\hat{\Phi}(0) = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \tilde{H}(0) \right\} \hat{\Phi}(0),$$

y debe existir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{H}(0)^n \hat{\Phi}(0). \quad (4.20)$$

Pero

$$\tilde{H}(0) = \frac{1}{2} \sum_{k=0} H^{(k)} = \frac{1}{2} S^{(0)}$$

y como $S^{(0)}$ tiene un autovalor igual a 2 – ver más adelante 4.2 – entonces $\tilde{H}(0)$ tiene un autovalor $\lambda_1 = 1$. Entonces son condiciones suficientes para la convergencia de $\tilde{H}(0)^n$ – y por consiguiente para la existencia de 4.20, que la matriz $\tilde{H}(0) = I$, ($\lambda_2 = 1$), o bien que el otro autovalor de $\tilde{H}(0)$ sea menor que 1 en módulo, ($|\lambda_2| < 1$).

4.4.2 Ortogonalidad

La ventaja de trabajar con una transformada ortonormal, es que tanto la compresión de una señal como su transmisión progresiva, son procesos estables. Se realiza la compresión de una señal calculando su transformada wavelet y descartando los coeficientes más pequeños en valor absoluto. Si las bases forman un conjunto ortonormal, entonces el MSE (error cuadrático medio) de la señal reconstruida es igual al promedio de los cuadrados de los coeficientes descartados.

Si $\{\Phi_1(x-k), \Phi_2(x-l)\}_{k,l \in Z}$ es un sistema ortonormal,

$$\langle \Phi_i(x-k), \Phi_j(x-l) \rangle = \delta_{i,j} \delta_{k,l} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad k, l \in Z$$

entonces se deduce la siguiente condición sobre las matrices $H^{(k)}$:

$$\sum_{k=0}^N H^{(k)} [H^{(k+2j)}]^T = \begin{cases} 2I & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

La condición de ortonormalidad de las wavelets y sus traslaciones enteras, es decir

$$\langle \Psi_i(x-k), \Psi_j(x-l) \rangle = \delta_{i,j} \delta_{k,l} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad k, l \in Z$$

implican

$$\sum_{k=0}^N G^{(k)} [G^{(k+2j)}]^T = \begin{cases} 2I & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Por último, si las multifunciones de escala –y sus corrimientos enteros– son ortogonales a las wavelets –con sus corrimientos enteros–.

$$\langle \Phi_i(x-k), \Psi_j(x-l) \rangle = 0 \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad k, l \in Z$$

entonces se puede deducir:

$$\sum_{k=0}^N G^{(k)} [H^{(k+2j)}]^T = 0 \quad \text{para todo } j \in Z. \quad (4.23)$$

4.4.3 Soporte compacto (buena localización en el tiempo)

Se trabaja con finitas matrices-filtro $H^{(k)}$, entonces el soporte de las funciones de escala es un conjunto compacto (ver [50]). Y si el soporte de las funciones de escala es compacto, y hay finitas matrices-filtro $G^{(k)}$, se deduce que el soporte de las wavelet también es un compacto.

Si todos los elementos de las matrices-filtro $H^{(k)}$ son distintos de cero, entonces los soportes de Φ_1 y de Φ_2 son iguales: son el intervalo I que cumple

$$I = \bigcup_{k=0}^N \frac{1}{2} \{I + k\}.$$

Cuanto mayor es el número de matrices $H^{(k)}$, mayor es el soporte.

4.4.4 Aproximación polinomial

Las funciones de escala que pueden reproducir en forma exacta a los polinomios de determinado orden – cuanto más elevado, mejor – son apropiadas para la compresión de imágenes. Si un polinomio pertenece a V_0 localmente, y calcula su transformada wavelet, toda la información queda en los coeficientes de aproximación, y los detalles son cero. Si una imagen tiene variaciones continuas de color – función suave – entonces al procesarla tendrá muchos coeficientes de detalle nulos o muy pequeños, y ésto se puede aprovechar para la compresión.

Definición 4.1. Decimos que $\Phi(x)$ tiene *aproximación polinomial* (accuracy) de orden m , si todo polinomio $p(x)$ de grado menor que m puede escribirse como:

$$p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^T \Phi(x - k) \quad (4.24)$$

donde α_k es un vector columna de 2 elementos.

Se conocen las condiciones para la aproximación polinomial de multifunciones de escala de una variable.– ver [51][52]. En este contexto de multifunciones de escala ortogonales y de soporte compacto, $\Phi(x)$ tiene orden de aproximación polinomial m si y solo si existen vectores columna de 2 elementos: v_0, v_1, \dots, v_{m-1} , ($v_0 \neq 0$), tales que, para $0 \leq p < m$, valen:

$$\sum_{t=0}^p \binom{p}{t} v_t^T (2i)^{t-p} (D^{p-t} \tilde{H})(0) = 2^{-p} v_p^T, \quad (4.25)$$

$$\sum_{t=0}^p \binom{p}{t} v_t^T (2i)^{t-p} (D^{p-t} \tilde{H})(0) = 0 \quad (4.26)$$

En [53] se dan condiciones equivalentes: $\Phi(x)$ – multifunción de escala ortogonal y de soporte compacto – tiene orden de aproximación polinomial m si y solo si existen vectores columna de 2 elementos: v_0, v_1, \dots, v_{m-1} tales que

$$v_p^T = \sum_{t=0}^p (-1)^{p-t} \binom{p}{t} 2^t v_t^T \sum_{k \in \Gamma_i} k^{(p-t)} H^{(k)}, \quad \text{para } 0 \leq p < m,$$

lo cual se puede escribir

$$v_p^T = \sum_{t=0}^p (-1)^{p-t} \binom{p}{t} 2^t v_t^T S_i^{(p-t)}, \quad \text{para } 0 \leq p < m.$$

Para el caso en que $\Phi_1(x)$ y $\Phi_2(x)$ son funciones de soporte compacto que conforman un sistema ortonormal con sus trasladadas enteras, y se cumple la ecuación de dilatación 4.3, daremos las fórmulas para órdenes de aproximación polinomial ≤ 3 . En lo que sigue, v_0, v_1, v_2 son vectores columna de 2 elementos. Si existe un vector v_0 que verifica:

$$v_0^T = v_0^T S_i^{(0)}, \quad i = 0, 1, \quad v_0^T \neq [0, 0], \quad (4.27)$$

entonces hay aproximación polinomial de orden 1. Si existen 2 vectores v_0, v_1 que verifican (4.27) y la siguiente ecuación:

$$v_1^T = -v_0^T S_i^{(1)} + 2v_1^T S_i^{(0)}, \quad i = 0, 1 \quad (4.28)$$

entonces hay aproximación polinomial de orden 2. Si existen vectores v_0, v_1, v_2 que verifican (4.27), (4.28), más las siguiente ecuación:

$$v_2^T = v_0^T S_i^{(2)} - 4v_1^T S_i^{(1)} + 4v_2^T S_i^{(0)}, \quad i = 0, 1 \quad (4.29)$$

entonces hay aproximación polinomial de orden 3.

Los vectores v_0, v_1, v_2 cumplen un rol fundamental en la aproximación de polinomios de grado ≤ 2 . A partir de ellos se obtienen los coeficientes de las combinaciones lineales de las traslaciones enteras de $\Phi_1(x)$ y $\Phi_2(x)$ para aproximar polinomios:

$$1 = v_0^T \sum_k \Phi(x - k),$$

$$x = \sum_k [kv_0 + v_1]^T \Phi(x - k),$$

$$x^2 = \sum_k [k^2 v_0 + 2kv_1 + v_2]^T \Phi(x - k).$$

Por ejemplo, en el gráfico 4.3, se observa como una combinación lineal de funciones de escala de Chui-Lian aproxima el polinomio $p(x) = x$.

4.4.5 Balanceo

Lebrun, Vetterli [[40]] [[35]] y Selesnick [[41]] introdujeron el concepto de multiwavelets balanceadas, primero, y de multiwavelets balanceadas de órdenes superiores, más adelante. Diseñaron multiwavelets balanceadas de diferentes órdenes y analizaron las implicaciones del balanceo. Al procesar una señal con wavelets balanceadas no es necesario prefiltrar la señal, y esto implica un ahorro de operaciones. La definición que se da a continuación puede diferir en una constante, si no se utiliza una transformada ortonormal.

Definición 4.2. Una multiwavelet – o una multifunción de escala – se dice *balanceada de orden 1* si la rama pasa-bajos del operador de síntesis (4.8) preserva las señales constantes

$$c_{\cdot, k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall k \in Z \implies U_{\cdot, k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall k \in Z$$

Lema 4.1. Sea (Φ, Ψ) un sistema multiwavelet ortogonal. Son equivalentes:

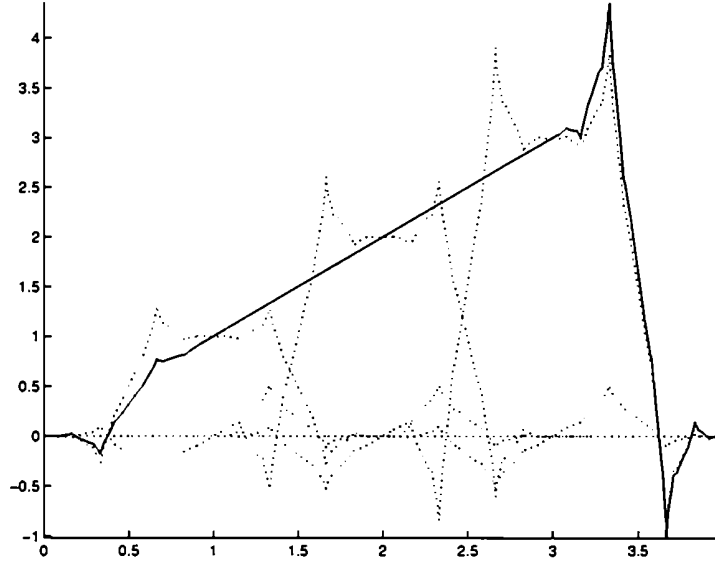


Figura 4.3: Aproximación de una recta por Φ_1, Φ_2 de Chui-Lian.

1. $\Phi(x)$ es balanceada de orden 1,
- 2.

$$c_{\cdot,k}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} c_{\cdot,k}^{(-1)} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ d_{\cdot,k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Demostración. La demostración se realiza aplicando las ecuaciones 4.21 y 4.22. □

Nota 4.3. Las multiwavelets son balanceadas de orden 1 si y solo si al procesar 2 señales constantes e idénticas se obtienen coeficientes de aproximación iguales –salvo una constante– a las señales de entrada, mientras que los coeficientes de detalle son nulos. Es decir, la rama de análisis pasa-bajos en el esquema 4.2 preserva 2 señales constantes e idénticas, y la rama de análisis pasa-altos del esquema las anula.

Definición 4.3. Una multiwavelet es *balanceado de orden m* , si para cada p ($0 \leq p < m$) existe un polinomio $q(x)$ de grado $\leq p$ tal que

$$c_{\cdot,k}^{(0)} = \begin{bmatrix} (2k)^p \\ (2k+1)^p \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} c_{\cdot,k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} q(2k) \\ q(2k+1) \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ d_{\cdot,k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Las señales $c_{1,k}^{(0)}$ y $c_{2,k}^{(0)}$ en la definición anterior provienen de separación de la señal original k^p en pares e impares. En un sistema multiwavelet balanceado de orden m , la rama de análisis pasa-bajos preserva los polinomios discretizados de grado $< m$ – es decir, no se obtiene el mismo polinomio discretizado sino otro polinomio de igual o menor grado – mientras que la rama de análisis pasa-altos los anula.

4.4.6 Buena localización en las frecuencias

En el procesamiento de señales con multiwavelets, para obtener los coeficientes de aproximación, se opera con matrices-filtro $H^{(k)}$: no se pueden exigir las condiciones de filtro pasa-bajos a las matrices. Se fijan estas condiciones a los filtros unidimensionales en los cuales se traduce la transformada, según se trabaje con 4 filtros 4.10, o con 2 filtros polifase 4.15. Del mismo modo, se fija la condición de filtros pasa-altos a los filtros que participan en el cálculo de los coeficientes de detalle.

Cuatro filtros pasa-bajos

En el cálculo de los coeficientes de aproximación, según las fórmulas 4.10, participan 4 filtros $H'_{ij}(\cdot)$, con $i, j = 1, 2$. Si $H'_{ij}(\cdot)$ es un filtro pasa-bajos, entonces $H_{ij}(\cdot)$ también lo es, y su respuesta en frecuencias $\hat{H}_{ij}(\cdot)$ debe ser 0 en $w = \pi$. Si $\hat{H}_{ij}(\cdot)$ tiene una raíz múltiple en $w = \pi$, hay un mayor decaimiento de $|\hat{H}_{ij}(w)|$ en π . Si la raíz es de orden m , la transformada Z de $H_{ij}(\cdot)$ verifica

$$H_{ij}(\cdot)(-1) = \frac{\partial H_{ij}(\cdot)}{\partial z}(-1) = \dots = \frac{\partial^{(m-1)} H_{ij}(\cdot)}{\partial z^{(m-1)}}(-1) = 0.$$

Cuatro filtros pasa-altos

En el cálculo de los coeficientes de detalle, según las fórmulas 4.11, participan 4 filtros $G'_{ij}(\cdot)$, con $i, j = 1, 2$. Si $G'_{ij}(\cdot)$ es un filtro pasa-altos, entonces $G_{ij}(\cdot)$ también lo es, y su respuesta en frecuencias $\hat{G}_{ij}(\cdot)$ debe ser 0 en $w = 0$. Si $\hat{G}_{ij}(\cdot)$ tiene una raíz múltiple en $w = 0$, hay un mayor decaimiento de $|\hat{G}_{ij}(w)|$ en 0. Si la raíz es de orden m , la transformada Z de $G_{ij}(\cdot)$ verifica

$$G_{ij}(\cdot)(1) = \frac{\partial G_{ij}(\cdot)}{\partial z}(1) = \dots = \frac{\partial^{(m-1)} G_{ij}(\cdot)}{\partial z^{(m-1)}}(1) = 0.$$

Dos filtros polifase pasa-bajos

Para lograr que los filtros F'_1 y F'_2 de las fórmulas 4.15 sean buenos filtros pasa-bajos, Xia [44] les impuso las siguientes condiciones:

$$\widehat{F}'_1(\pi) = F'_1(-1) = 0$$

$$\widehat{F}'_2(\pi) = F'_2(-1) = 0.$$

Generalizando este concepto, si la transformada Z de cada filtro polifase F_i para $i = 1, 2$ tiene una raíz de orden m en $z = -1$, es decir

$$F_i(-1) = \frac{\partial F_i}{\partial z}(-1) = \dots = \frac{\partial^{(m-1)} F_i}{\partial z^{(m-1)}}(-1) = 0,$$

mejores filtros pasa-bajos resultarán ser F'_1 y F'_2 .

Dos filtros polifase pasa-altos

Para lograr que los filtros I'_1 y I'_2 de las fórmulas 4.19 sean buenos filtros pasa-altos, se pide que la transformada Z de cada filtro polifase I_i para $i = 1, 2$ tenga una raíz de orden m en $z = 1$, es decir

$$I_i(1) = \frac{\partial I_i}{\partial z}(1) = \dots = \frac{\partial^{(m-1)} I_i}{\partial z^{(m-1)}}(1) = 0.$$

Cuanto mayor sea m , mejores filtros pasa-altos resultarán ser I'_1 y I'_2 .

4.5 Propiedades : sus relaciones y consecuencias

Veremos que algunas equivalencias entre propiedades, que se cumplían en el caso de las wavelets unidimensionales, se siguen manteniendo en el caso de las multiwavelets. Pero no todas se mantienen: la aproximación polinomial no implica que la rama pasa-bajos de la transformada preserve los polinomios discretizados, y que la rama pasa-altos los anula. Y las condiciones 4.30 no aseguran la aproximación polinomial, como en el caso de las wavelets en una dimensión, sino que están ligadas a las condiciones de filtro pasa-bajos para los filtros $H_{ij}^{(\cdot)}$.

Lema 4.2. • $S^{(0)} \begin{bmatrix} \int \Phi_1 \\ \int \Phi_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \int \Phi_1 \\ \int \Phi_2 \end{bmatrix}$

• $T^{(0)} \begin{bmatrix} \int \Phi_1 \\ \int \Phi_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \int \Psi_1 \\ \int \Psi_2 \end{bmatrix}$

Demostración. Integrando la ecuación 4.3 se obtiene (1).

Integrando la ecuación 4.4 se obtiene (2). □

Teorema 4.1. Sea (Φ, Ψ) un sistema ortonormal, $X_k^{(0)}$ son los coeficientes de la señal original, $c_1^{(0)}$ son los valores pares de $X^{(0)}$ y $c_2^{(0)}$ los valores impares. Se calcula su transformada multiwavelet de L niveles, obteniéndose los vectores de coeficientes $c_{\cdot,k}^{(-L)}, d_{\cdot,k}^{(-L)}, \dots, d_{\cdot,k}^{(-1)}$, tales que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k \left[c_{\cdot,k}^{(0)} \right]^T \Phi(x - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[c_{\cdot,k}^{(-L)} \right]^T 2^{-L/2} \Phi\left(\frac{x}{2^L} - k\right) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^L \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[d_{\cdot,k}^{(-j)} \right]^T 2^{-j/2} \Psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right). \end{aligned}$$

Si se cuantizan los coeficientes, aplicándoles una función de cuantización $Q(x)$,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\cdot,k}^{(-L)} &= \begin{bmatrix} Q(c_{1,k}^{(-L)}) \\ Q(c_{2,k}^{(-L)}) \end{bmatrix}, \\ \tilde{d}_{\cdot,k}^{(-j)} &= \begin{bmatrix} Q(d_{1,k}^{(-j)}) \\ Q(d_{2,k}^{(-j)}) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

entonces el error de la señal reconstruida $\tilde{X}^{(0)}$, que se obtiene antitransformando, es igual a la norma 2 de los errores de cuantización:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\tilde{c}_{\cdot,k}^{(-L)} \right]^T 2^{-L/2} \Phi\left(\frac{x}{2^L} - k\right) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^L \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\tilde{d}_{\cdot,k}^{(-j)} \right]^T 2^{-j/2} \Psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right) \\ &= \sum_k \tilde{c}_{\cdot,k}^{(0)} \Phi(x - k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|X^{(0)} - \tilde{X}^{(0)}\|_2 &= \|f - \tilde{f}\|_2 = \left(\sum_k \|c_k^{(0)} - \tilde{c}_k^{(0)}\|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_k \|c_{\cdot,k}^{(-L)} - \tilde{c}_{\cdot,k}^{(-L)}\|^2 + \sum_{j=1}^L \sum_k \|d_{\cdot,k}^{(-j)} - \tilde{d}_{\cdot,k}^{(-j)}\|^2 \right)^{1/2}\end{aligned}$$

lo cual indica que la cuantización es un proceso estable, cuando la transformada es ortonormal.

Lema 4.3. Si $\{\Phi(x), \Psi(x)\}$ es un sistema multiwavelet ortogonal, son equivalentes:

- $\Phi(x)$ tiene aproximación polinomial de orden m .
- $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ tienen m momentos nulos.

Teorema 4.2. Sea (Φ, Ψ) un sistema multiwavelet ortogonal. Son equivalentes:

1. $\Phi(x)$ es balanceada de orden 1,
2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} H(1) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} H(-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S_j^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ para $j = 0, 1$.
4. $\int \Phi_1(x) dx = \int \Phi_2(x) dx = 1$,
5. $F_1(1) + F_2(1) = 4$ y $F_1(z) + F_2(z) = 0$, para $z = i, -1, -i$.
6. $S^{(0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $T^{(0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Demostración. Ver [54] y [35] para las condiciones 1,2,4,y 5. Las condiciones 3 y 6 se deducen fácilmente del lema 4.1. □

Lema 4.4. Si $\Phi(x)$ es balanceada de orden m , entonces tiene aproximación polinomial de orden m . La implicación contraria no es cierta: si $\Phi(x)$ tiene aproximación polinomial de orden m , esto no implica que la rama pasa-bajos de la transformada preserve los polinomios discretizados de grado m .

El siguiente teorema aclara la relación entre orden de aproximación y balanceo:

Teorema 4.3. (Extraído de [35], teoremas 8 y 9)

Sea (Φ, Ψ) un sistema multiwavelet ortogonal. Son equivalentes:

1. $\Phi(x)$ es balanceada de orden m ,
2. existe una secuencia de Appell $\rho_0(t), \dots, \rho_{m-1}(t)$, tal que los polinomios discretizados $X_k^{(0)} = \rho_p(k/2)$ con $p < m$ son exactamente preservados por la rama pasa-bajos del operador de síntesis, es decir, para $p = 0, \dots, m-1$, vale

$$c_{\cdot,k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} \rho_p(k) \\ \rho_p(k + \frac{1}{2}) \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \implies U_{\cdot,k} = \frac{2^{-p}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \rho_p(k) \\ \rho_p(k + \frac{1}{2}) \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

3. existe una secuencia de Appell $\rho_0(t), \dots, \rho_{m-1}(t)$ tal que los vectores v_0, v_1, \dots, v_{m-1} , definidos por

$$v_p^T = \begin{bmatrix} \rho_p(0) & \rho_p(\frac{1}{2}) \end{bmatrix},$$

verifican las ecuaciones 4.25 y 4.26 –condiciones de aproximación polinomial de orden m – para $0 \leq p < m$.

4. $\Phi(x)$ tiene aproximación polinomial de orden m , y además, para $0 \leq p < m$, las funciones trasladadas $\Phi_i(x + \frac{i-1}{2})$ tienen momentos de orden p iguales

$$\int x^p \Phi_1(x) dx = \int x^p \Phi_2(x + \frac{1}{2}) dx.$$

Lema 4.5. Si $\Phi(x)$ tiene aproximación polinomial de orden 1, entonces o bien

$$\sum_{k \in \Gamma_0} H^{(k)} = \sum_{k \in \Gamma_1} H^{(k)},$$

o bien las columnas de la matriz

$$\sum_{k \in \Gamma_0} H^{(k)} - \sum_{k \in \Gamma_1} H^{(k)}$$

son ortogonales al vector v_0 .

Demostración. Restando las 2 ecuaciones 4.27 para $i = 0$ y para $i = 1$, resulta

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = v_0^T (S_0^{(0)} - S_1^{(0)}).$$

Por consiguiente o bien $S_0^{(0)} = S_1^{(0)}$, o bien las columnas de $S_0^{(0)} - S_1^{(0)}$ son ortogonales a v_0 . \square

Nota 4.4. Si vale

$$\sum_{k \in \Gamma_0} H^{(k)} = \sum_{k \in \Gamma_1} H^{(k)},$$

entonces $\Phi(x)$ tiene aproximación polinomial de orden 1. La implicación inversa no es válida.

Lema 4.6. Son equivalentes:

- para los 4 filtros $H_{ij}^{(\cdot)}$ de las fórmulas 4.10 se verifica

$$\frac{\partial^p H_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z^p}(-1) = 0, \quad \text{para } p = 0, 1, \dots, m-1$$

- para $p = 0, \dots, m-1$, vale

$$\sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_0} k^p H^{(k)} = \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_1} k^p H^{(k)}. \quad (4.30)$$

Demostración. A la transformada Z de cada filtro $H_{ij}^{(\cdot)}$

$$H_{ij}^{(\cdot)}(z) = \sum_{k \in \Lambda} H_{ij}^{(k)} z^{-k},$$

se la deriva p veces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p H_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z^p}(z) &= \sum_{k \in \Lambda} H_{ij}^{(k)} (-1)^p k(k+1) \dots (k+p) z^{-k-p} \\ &= (-1)^p z^{-p} \sum_{k \in \Lambda} H_{ij}^{(k)} k(k+1) \dots (k+p) z^{-k}. \end{aligned}$$

Si se especializa en $z = -1$, y se separa según el índice de cada suma sea par ($k \in \Gamma_0$) o impar ($k \in \Gamma_1$), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p H_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z^p}(-1) &= \left\{ \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_0} H_{ij}^{(k)} k^p - \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_1} H_{ij}^{(k)} k^p \right\} \\ &\quad + b_{p-1} \left\{ \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_0} H_{ij}^{(k)} k^{p-1} - \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_1} H_{ij}^{(k)} k^{p-1} \right\} \\ &\quad + \dots + b_{p-1} \left\{ \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_0} H_{ij}^{(k)} k^{p-1} - \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_1} H_{ij}^{(k)} k^{p-1} \right\} \end{aligned}$$

para ciertos coeficientes b_1, \dots, b_{p-1} . Para cada (i, j) , se tiene una igualdad de este tipo. Uniendo las 4 igualdades, queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p H^{(\cdot)}}{\partial z^p}(-1) &= \left\{ \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_0} H^{(k)} k^p - \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_1} H^{(k)} k^p \right\} \\ &\quad + b_{p-1} \left\{ \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_0} H^{(k)} k^{p-1} - \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_1} H^{(k)} k^{p-1} \right\} \\ &\quad + \dots + b_{p-1} \left\{ \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_0} H^{(k)} k^{p-1} - \sum_{k \in \Lambda \cap \Gamma_1} H^{(k)} k^{p-1} \right\}. \end{aligned}$$

El resto de la demostración es inmediata. □

Lema 4.7. Son equivalentes:

- para los 4 filtros $G_{ij}^{(\cdot)}$ de las fórmulas 4.11 se verifica

$$\frac{\partial^p G_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z^p}(1) = 0, \quad \text{para } p = 0, \dots, m-1,$$

- para $p = 0, \dots, m-1$, vale

$$\sum_{k \in \Lambda} k^p G^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostración. A la transformada Z de cada filtro $G_{ij}^{(\cdot)}$

$$G_{ij}(z) = \sum_{k \in \Lambda} G_{ij}^{(k)} z^{-k},$$

se la deriva p veces:

$$\frac{\partial^p G_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z^p}(z) = (-1)^p z^{-p} \sum_{k \in \Lambda} G_{ij}^{(k)} k(k+1) \dots (k+p) z^{-k}.$$

Reemplazando en $z = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p G_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z^p}(1) &= (-1)^p \sum_{k \in \Lambda} G_{ij}^{(k)} k(k+1) \dots (k+p) \\ &= (-1)^p \left\{ \sum_{k \in \Lambda} G_{ij}^{(k)} k^p + b_{p-1} \sum_{k \in \Lambda} G_{ij}^{(k)} k^{p-1} + b_1 \sum_{k \in \Lambda} G_{ij}^{(k)} k \right\}. \end{aligned}$$

Y uniendo las 4 igualdades para diferentes (i, j) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p G^{(\cdot)}}{\partial z^p}(1) &= (-1)^p \sum_{k \in \Lambda} G^{(k)} k(k+1) \dots (k+p) \\ &= (-1)^p \left\{ \sum_{k \in \Lambda} G^{(k)} k^p + b_{p-1} \sum_{k \in \Lambda} G^{(k)} k^{p-1} + b_1 \sum_{k \in \Lambda} G^{(k)} k \right\}, \end{aligned}$$

con lo cual el lema queda demostrado. \square

Lema 4.8. Si los filtros F_1 y F_2 de las fórmulas 4.15 verifican

$$F_1(-1) = F_2(-1) = 0$$

entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{11}^{(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{12}^{(k)} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{21}^{(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{22}^{(k)}. \quad (4.31)$$

Demostración. La ecuación 4.14 se convierte, para $z = -1$, en

$$\begin{aligned} F_1(-1) &= H_{11}^{(\cdot)}(1) - H_{12}^{(\cdot)}(1) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{11}^{(k)} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{12}^{(k)} = 0, \end{aligned}$$

y se obtiene la primer igualdad. Para la segunda, se trabaja en forma análoga con F_2 \square

Nota 4.5. Si $F_1(-1) = F_2(-1) = 0$, entonces no vale $\tilde{H}(0) = I$, (si fuera $\tilde{H}(0) = I$, como $S^{(0)} = 2\tilde{H}(0)$ vale

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{11}^{(k)} = 2, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_{12}^{(k)} = 0,$$

y no se cumpliría 4.31, absurdo) y entonces el segundo autovalor de $\tilde{H}(0)$ debe cumplir $|\lambda_2| < 1$. La condición de filtro pasa-bajos sobre los filtros polifase excluye la posibilidad de que $\tilde{H}(0) = I$.

Multiwavelet	autor	figura	prop.	ordende balanceo	orden de aprox. pol.	largo
GHM	Geronimo Hardin Massopust	4.1	simétrica	–	2	4
CL	Chui Lian	4.4	simétrica	–	2	3
sa4	Shen Tan Tham	4.5	simétrica	–	1	4
cardbal2	Selesnick	4.6	cardinal	2	2	4
cardbal3	Selesnick	4.7	cardinal	3	3	8
cardbal4	Selesnick	4.8	cardinal	4	4	12

Tabla 4.1: Ejemplos de multiwavelets ortogonales en 1d.

Lema 4.9. Si los filtros de las fórmulas 4.19 verifican

$$I_1(1) = I_2(1) = 0$$

entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} G_{11}^{(k)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_{12}^{(k)} = 0 \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_{21}^{(k)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_{22}^{(k)} = 0. \quad (4.32)$$

Demostración. Se demuestra fácilmente el lema poniendo $z = 1$ en 4.18 □

4.6 Ejemplos

En la tabla 4.1 se dan ejemplos de 2 sistemas multiwavelet ortogonales.

Los gráficos de esta sección se realizaron con el paquete de rutinas MWMP de Vasily Strela, y se pueden obtener de <http://math.dartmouth.edu/~strela/MWMP>. Las funciones de escala cardinales cumplen la condición de interpolación $\Phi_1(n/2) = \delta(n)$, $\Phi_2(n/2) = \delta(n-1)$.

4.7 Procesamiento de imágenes

Para procesar una imagen con las multiwavelets en 1 dimensión, se aplica la transformada a las filas y luego a las columnas de la imagen resultante: las bases son separables. Como primer paso se preprocesa la imagen: esto incluye al prefiltrado, y la separación en pares e impares – ver figura 4.9, recién entonces se está en condiciones de aplicar la transformada. En la figura 4.10 se observa un paso de la transformada multiwavelet Chui-Lian. La transformada contiene 16 submatrices, cuyas bases son

$$\begin{aligned} &\Phi_i \left(\frac{x}{2} - k \right) \Phi_j \left(\frac{y}{2} - l \right), \\ &\Phi_i \left(\frac{x}{2} - k \right) \Psi_j \left(\frac{y}{2} - l \right), \\ &\Psi_i \left(\frac{x}{2} - k \right) \Phi_j \left(\frac{y}{2} - l \right), \\ &\Psi_i \left(\frac{x}{2} - k \right) \Psi_j \left(\frac{y}{2} - l \right), \end{aligned}$$

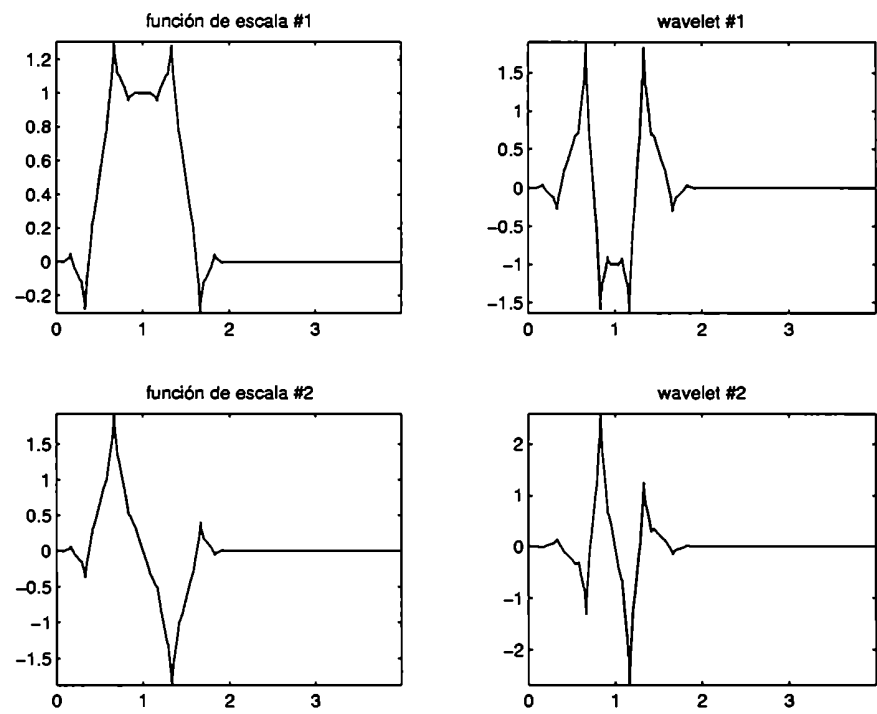


Figura 4.4: Multifunción de escala y multiwavelet CL.

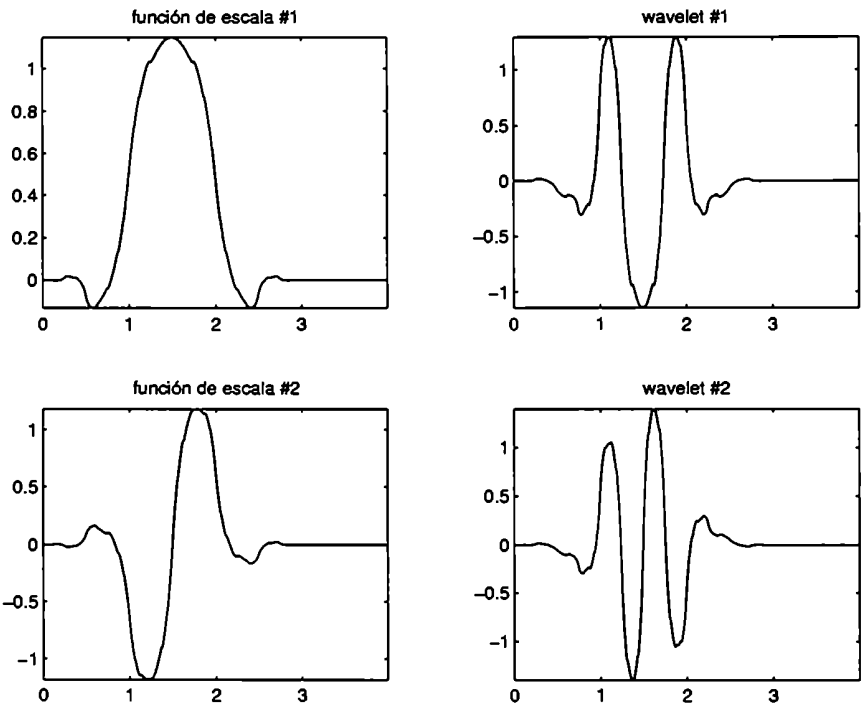


Figura 4.5: Multifunción de escala y multiwavelet sa4.

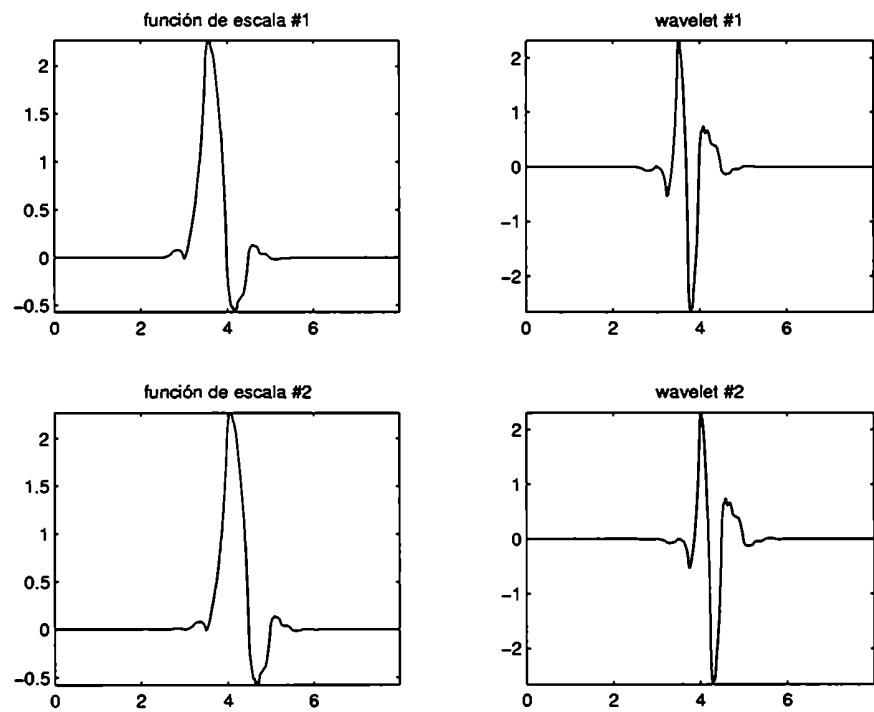


Figura 4.6: Multifunción de escala y multiwavelet cardbal2.

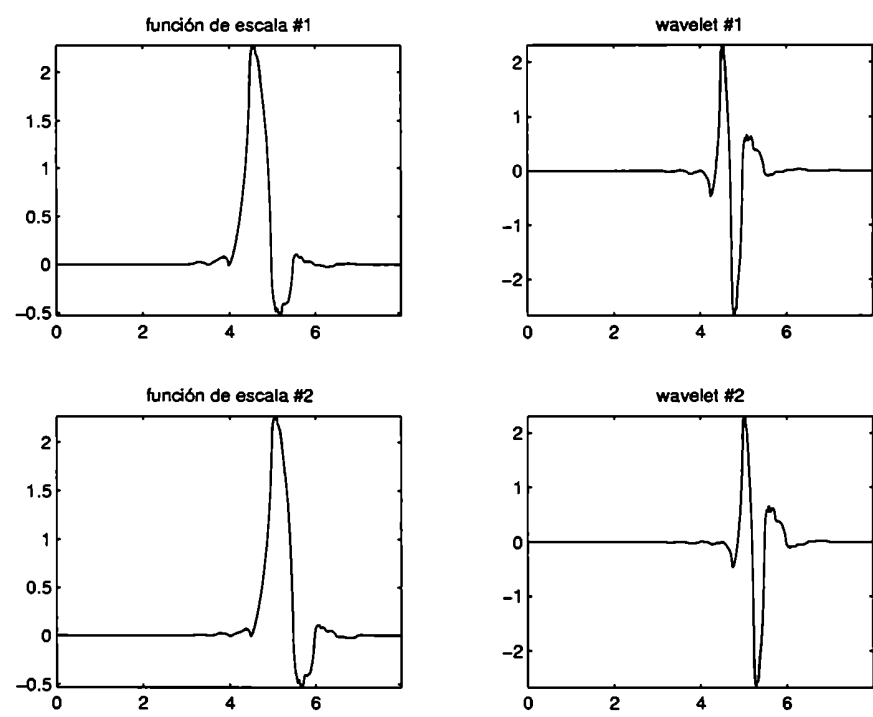


Figura 4.7: Multifunción de escala y multiwavelet cardbal3.

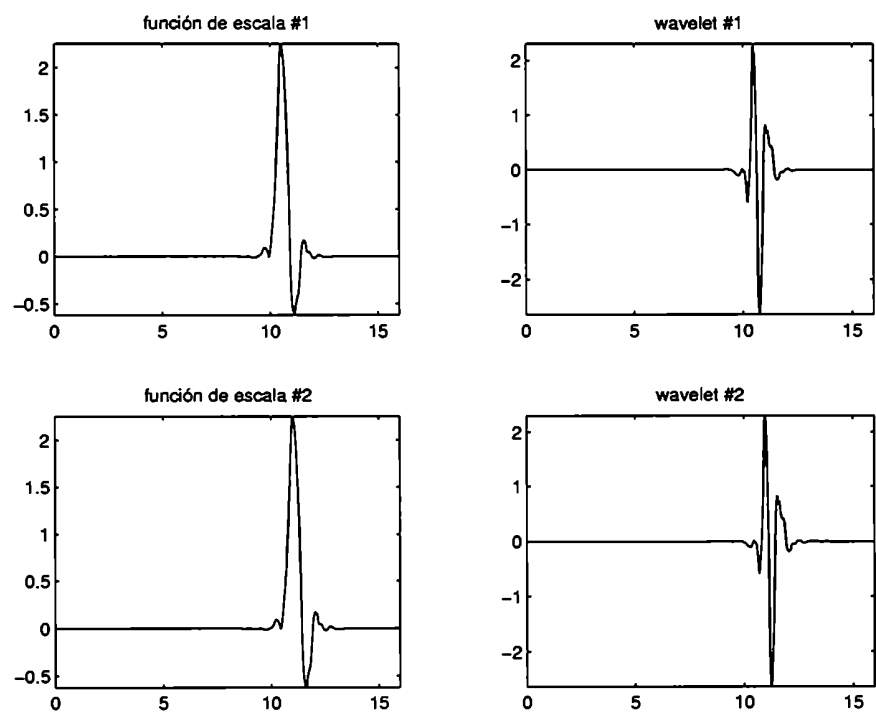


Figura 4.8: Multifunción de escala y multiwavelet carbal4.

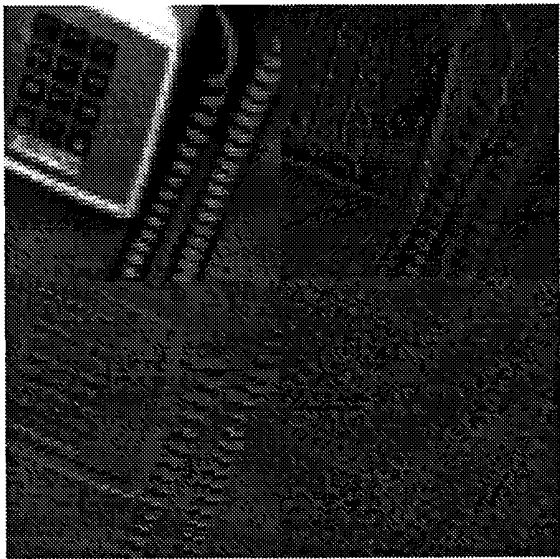


Figura 4.9: Teléfono preprocesado.

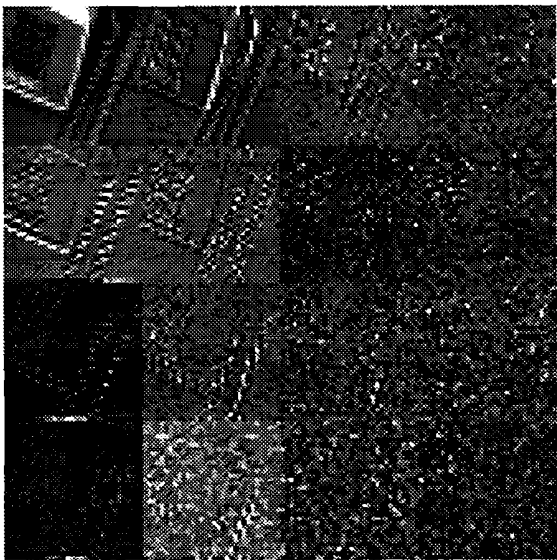


Figura 4.10: Un paso de la transformada CL.

donde $i, j = 1, 2, y k, l = 0, \dots, 31$. Los valores de las submatrices han sido escalados para poder observar la información que contienen. Los coeficientes de aproximación, ubicados en las 4 submatrices arriba a la izquierda, corresponden a traslaciones enteras de 4 productos $\Phi_i(\frac{x}{2})\Phi_j(\frac{y}{2})$. Con 16 submatrices generadas en un paso de la transformada, se vuelve más complicado entender qué representa cada banda. Al igual que cuando se usan transformadas unidimensionales separables, se observan detalles verticales y horizontales.

Capítulo 5

Multiwavelets bidimensionales no separables

Ya se han visto dos generalizaciones de las funciones de escala y de las wavelets unidimensionales: una es la que trata de wavelets (y funciones de escala) bidimensionales no separables, y la otra es la que trata de multiwavelets (y multifunciones de escala) en una dimensión. El objetivo de este trabajo es el de unir los adelantos en ambos temas, y de construir multifunciones de escala y multiwavelets bidimensionales, no separables. Elegimos construir multiwavelets ortogonales con decimación diagonal. En este capítulo daremos una breve introducción al análisis de multirresolución, y al procesamiento de imágenes con las multiwavelets que se construyeron.

5.1 Definiciones y notación

- Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = [f_1, f_2]^T$ donde $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, se define la *transformada Fourier* de f como

$$\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$
$$\hat{f}(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, x_2) e^{-i(w_1 x_1 + w_2 x_2)} dx_1 dx_2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2) e^{-i(w_1 x_1 + w_2 x_2)} dx_1 dx_2 \end{bmatrix}.$$

- Dado $H = \{H^{(0)}, H^{(1)}, H^{(3)}, \dots\}$ un conjunto de matrices $H^{(k)}$ de 2×2 , con $k \in \Lambda$, definimos la *transformada Z* de H como

$$H(z) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$
$$H(z_1, z_2) = \sum_{k \in \Lambda} H^{(k)} z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}.$$

Nota 5.1. A las matrices $H^{(k)}$ las llamaremos matrices-filtro.

- Dado H un conjunto de matrices $H^{(k)}$ de 2×2 , con $k \in \Lambda$, definimos su *respuesta en frecuencias*, o transformada Fourier discreta en el tiempo, como

$$\hat{H} : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$\hat{H}(w_1, w_2) = \sum_{k \in \Lambda} H^{(k)} e^{-i(k_1 w_1 + k_2 w_2)}.$$

- Dado H un conjunto de matrices $H^{(k)}$ de 2×2 , con $k \in \Lambda$, se define el símbolo

$$\tilde{H}(w_1, w_2) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \Lambda} H^{(k)} e^{-i(k_1 w_1 + k_2 w_2)} = \frac{1}{2} \hat{H}(w_1, w_2).$$

- Llamamos $S_i^{(j,l)}$ a la suma de todas las matrices $H^{(k)}$, cuyos índices pertenecen a la subgrilla Γ_i , multiplicadas por $k_1^j \cdot k_2^l$:

$$S_i^{(j,l)} = \sum_{k \in \Gamma_i} k_1^j k_2^l H^{(k)},$$

y

$$S^{(j,l)} = \sum_{k \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1} k_1^j k_2^l H^{(k)} = S_0^{(j,l)} + S_1^{(j,l)}.$$

Por ejemplo:

$$S_i^{(0,0)} = \sum_{k \in \Gamma_i} H^{(k)} \quad S_i^{(1,0)} = \sum_{k \in \Gamma_i} k_1 H^{(k)} \quad S_i^{(0,1)} = \sum_{k \in \Gamma_i} k_2 H^{(k)}.$$

$S_i^{(0,0)}$ es la suma de las matrices $H^{(k)}$ de la subgrilla Γ_i ; y

$$S^{(0,0)} = S_0^{(0,0)} + S_1^{(0,0)} = \sum_k H^{(k)}$$

es la suma de todas las matrices $H^{(k)}$.

- De manera análoga definimos $T^{(0,0)} = \sum_k G^{(k)}$ a la suma de todas las matrices $G^{(k)}$.
- Se dice que $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2]^T$, $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es Hölder continua con exponente de Hölder s , si Φ_1 y Φ_2 pertenecen al espacio de Hölder $C^s(\mathbb{R}^2)$.

5.2 Análisis de multirresolución

Igual que en todos los casos contemplados anteriormente – es decir, wavelets en una y dos dimensiones, y multiwavelets en una dimensión – en el caso de las multiwavelets bidimensionales, un análisis de multirresolución consiste en una secuencia de subespacios anidados

$$.. \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset ..$$

cuya unión es densa en $L^2(\mathbb{R}^2)$ y cuya intersección es la función nula.

Definimos al subespacio V_0 como el subespacio generado por las traslaciones de pares de enteros de r funciones de escala: $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r$. Como hicimos antes, consideramos solamente las multifunciones de escala ortogonales, y nos restringimos al caso $r = 2$. Tenemos así dos funciones de escala Φ_1 y Φ_2 , definidas sobre \mathbb{R}^2 y que verifican que la familia $\{\Phi_1(x - k), \Phi_2(x - l)\}$ es ortonormal, y

$$V_0 = \overline{\text{gen} \{ \Phi_1(\cdot - k), \Phi_2(\cdot - l) \}_{k, l \in \mathbb{Z}^2}}.$$

Para realizar una dilatación del espacio R^2 , se recurre a una matriz D de 2×2 , cuyos coeficientes son enteros y cuyos autovalores verifican $|\lambda_k| > 1$. Por razones prácticas de procesamiento de imágenes, ya explicadas – ver 3.8 – pedimos que la matriz D tenga valores singulares que verifican $\sigma_k > 1$. Si esto se cumple, multiplicar a cualquier vector de \mathbb{R}^2 por D equivale a una dilatación del mismo vector, razón por la cual D es llamada matriz de dilatación.

Los demás subespacios V_j son generados por las traslaciones enteras de Z^2 de una versión dilatada o contraída de Φ_1 y Φ_2 :

$$V_j = \overline{\text{gen}\{\Phi_1(D^j x - k), \Phi_2(D^j x - l)\}}_{k, l \in Z^2}.$$

El subespacio V_0 está contenido en V_1 , entonces tanto $\Phi_1(x)$ como $\Phi_2(x)$ son igual a una combinación lineal de las bases de V_1 . En efecto,

$$\Phi_1(x) = \sum_{k \in \Lambda \subset Z^2} H_{11}^{(k)} \Phi_1(Dx - k) + H_{12}^{(k)} \Phi_2(Dx - k) \quad (5.1)$$

$$\Phi_2(x) = \sum_{k \in \Lambda \subset Z^2} H_{21}^{(k)} \Phi_1(Dx - k) + H_{22}^{(k)} \Phi_2(Dx - k) \quad (5.2)$$

Esta ecuación, llamada ecuación de dilatación o refinamiento, escrita en forma vectorial, es:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{bmatrix} = \sum_k [H^{(k)}] \begin{bmatrix} \Phi_1(Dx - k) \\ \Phi_2(Dx - k) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

y en forma más abreviada

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \Lambda \subset Z^2} H^{(k)} \Phi(Dx - k)$$

donde los $H^{(k)}$ son matrices de 2×2 .

Por abuso de notación $\Phi_1(Dx - k)$ indica que se aplica Φ_1 a las 2 componentes de

$$Dx - k = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Consideramos 2 posibles matrices de dilatación: D_1 , una reflexión o simetría seguida de una dilatación del plano real en $\sqrt{2}$, y D_2 , una rotación seguida de una dilatación del plano en $\sqrt{2}$. Ambas matrices tienen valores singulares $\sigma_k = \sqrt{2}$. En ambos casos $|D| = |\det(D)| = 2$.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ambas matrices de dilatación D_1 and D_2 inducen una decomposición de Z^2 , el conjunto de todos los pares de enteros, en dos subconjuntos (cosets): Γ_0 Γ_2 , formando las subgrillas al tresbolillo (quincunx), como si fueran los cuadrados negros y blancos de un tablero de ajedrez – observar el esquema 3.5 –:

$$Z^2 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 ; \quad \Gamma_0 = \{DZ^2\} ; \quad \Gamma_1 = \left\{ DZ^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Inicialmente consideraremos un conjunto de 8 matrices $H^{(k)}$ con índices como en la siguiente matriz por bloques

$$\begin{bmatrix} 0 & H^{(1,1)} & H^{(2,1)} & 0 \\ H^{(0,0)} & H^{(1,0)} & H^{(2,0)} & H^{(3,0)} \\ 0 & H^{(1,-1)} & H^{(2,-1)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Cuatro de las matrices (O) tienen índices en una subgrilla, y las otras cuatro (×) tienen índices en la otra subgrilla, como se indica en el gráfico,

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{O} & \times & \\ & \text{O} & \times & \text{O} & \times \\ & & \text{O} & \times & \end{array}$$

y el conjunto Λ es

$$\Lambda = \{(1, 1), (2, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (1, -1), (2, -1)\}. \quad (5.5)$$

Los subespacios W_j son el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1}

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad V_j \perp W_j,$$

y son generados por las traslaciones de $r(|D| - 1) = r$ funciones llamadas wavelets. En nuestro caso ($r = 2$) tenemos dos wavelets Ψ_1 y Ψ_2 . Al par (Ψ_1, Ψ_2) se lo llama multiwavelet.

$$W_j = \text{span} \{ \Psi_1(D^j \cdot -k), \Psi_2(D^j \cdot -l) \}_{k,l \in \mathbb{Z}^2}.$$

De la inclusión $W_0 \subset V_1$ se deduce la ecuación de la multiwavelet, que escrita en forma vectorial, es:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} = \sum_{k \in \Lambda} [G^{(k)}] \begin{bmatrix} \Phi_1(Dx - k) \\ \Phi_2(Dx - k) \end{bmatrix}$$

y en forma más abreviada

$$\Psi(x) = \sum_{k \in \Lambda} G^{(k)} \Phi(Dx - k). \quad (5.6)$$

Las matrices $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$ son las matrices-filtro de la transformada wavelet. En este trabajo tomamos el mismo conjunto de índices para $H^{(k)}$ y para $G^{(k)}$: sacrificamos generalidad en pos de una mayor sencillez operativa. Entonces, inicialmente, las matrices $G^{(k)}$ son

$$\begin{bmatrix} 0 & G^{(1,1)} & G^{(2,1)} & 0 \\ G^{(0,0)} & G^{(1,0)} & G^{(2,0)} & G^{(3,0)} \\ 0 & G^{(1,-1)} & G^{(2,-1)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Más adelante agregaremos otras distribuciones de índices.

5.3 Procesamiento de imágenes

Al trabajar con 2 multiwavelets, que es equivalente a trabajar con un banco de filtros de 2 entradas, se debe descomponer la imagen original $X^{(0)}$ en 2 imágenes $c_{1,k}^{(0)}$ y $c_{2,k}^{(0)}$ ($k \in \mathbb{Z}^2$). Sea $f(x)$ la función cuyas componentes en las bases $\{\Phi_1(x - k)\}$ y $\{\Phi_2(x - k)\}$ son, respectivamente, $c_{1,k}^{(0)}$ y $c_{2,k}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} f &\in V_0 = \text{span} \{ \Phi_1(\cdot - k), \Phi_2(\cdot - l) \}_{k,l \in \mathbb{Z}^2} \\ f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_{1,k}^{(0)} \Phi_1(x - k) + c_{2,k}^{(0)} \Phi_2(x - k). \end{aligned}$$

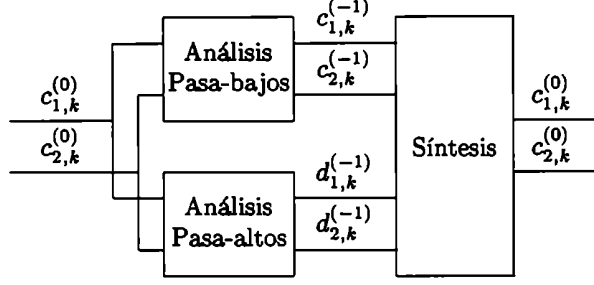


Figura 5.1: Esquema de análisis-síntesis

Esto, escrito en forma más resumida, se convierte en

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (c_{\cdot,k}^{(0)})^T \Phi(x - k), \quad \text{donde } c_{\cdot,k}^{(0)} = \begin{bmatrix} c_{1,k}^{(0)} \\ c_{2,k}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

El esquema de análisis (ver la figura 5.1) tiene a las imágenes $c_{1,k}^{(0)}$, $c_{2,k}^{(0)}$ como datos de entrada, y en la salida se obtienen dos imágenes de aproximación: $c_{1,k}^{(-1)}$, $c_{2,k}^{(-1)}$, y dos imágenes de detalle: $d_{1,k}^{(-1)}$ y $d_{2,k}^{(-1)}$. En forma vectorial, tenemos:

$$c_{\cdot,k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} c_{1,k}^{(-1)} \\ c_{2,k}^{(-1)} \end{bmatrix} \quad d_{\cdot,k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} d_{1,k}^{(-1)} \\ d_{2,k}^{(-1)} \end{bmatrix}.$$

Si escribimos $f(x)$ como la suma de sus proyecciones sobre V_{-1} y W_{-1} :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_{\cdot,k}^{(-1)T} \Phi(D^{-1}x - k) + \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} d_{\cdot,k}^{(-1)T} \Psi(D^{-1}x - k)$$

se puede demostrar que se cumplen las siguientes fórmulas de análisis:

$$c_{\cdot,k}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} H^{(j-Dk)} c_{\cdot,j}^{(0)} \quad (5.8)$$

$$d_{\cdot,k}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} G^{(j-Dk)} c_{\cdot,j}^{(0)}. \quad (5.9)$$

Un paso de la transformada multiwavelet consiste en obtener $c_{\cdot,k}^{(-1)}$ y $d_{\cdot,k}^{(-1)}$ a partir de $c_{\cdot,k}^{(0)}$. De manera análoga se obtiene la fórmula de síntesis:

$$c_{\cdot,k}^{(0)} = U_{\cdot,k} + V_{\cdot,k} \quad (5.10)$$

donde

$$U_{\cdot,k} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \left(H^{(k-Dj)} \right)^T c_{\cdot,j}^{(-1)} \quad (5.11)$$

$$V_{\cdot,k} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \left(G^{(k-Dj)} \right)^T d_{\cdot,j}^{(-1)} \quad (5.12)$$

Un segundo paso de la transformada multiwavelet consiste en aplicar las fórmulas 5.8 y 5.9 a los coeficientes $c_{\cdot,k}^{(-1)}$, obteniéndose los coeficientes $c_{\cdot,k}^{(-2)}$ y $d_{\cdot,k}^{(-2)}$, y la función $f(x)$ se escribe entonces como

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \left[c_{\cdot,k}^{(-2)} \right]^T \frac{1}{|D|} \Phi(D^{-2}x - k) + \sum_{j=1}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \left[d_{\cdot,k}^{(-j)} \right]^T \frac{1}{(\sqrt{|D|})^j} \Psi(D^{-j}x - k).$$

Igual que en el caso de las multiwavelets unidimensionales, las fórmulas de análisis (5.8) y (5.9) no pueden interpretarse como una convolución seguida de un submuestreo, como en el caso de una sola función de escala: no hay convolución, puesto que el producto es un producto matricial, y el índice sobre el cual se opera es el índice de las matrices-filtro. Daremos 2 formas equivalentes de estas fórmulas.

Los coeficientes de aproximación en la fórmula (5.8) pueden escribirse como

$$c_{1,\cdot}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left[\left(H'_{11}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(H'_{12}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right] \downarrow D \quad (5.13)$$

$$c_{2,\cdot}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left[\left(H'_{21}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(H'_{22}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right] \downarrow D$$

donde el símbolo $*$ indica convolución en 2 dimensiones, y $H'(\cdot, l) = H^{(-k, -l)}$. De igual manera, los coeficientes de detalle en la fórmula (5.9) pueden escribirse como

$$d_{1,\cdot}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left[\left(G'_{11}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(G'_{12}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right] \downarrow D \quad (5.14)$$

$$d_{2,\cdot}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left[\left(G'_{21}(\cdot) * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(G'_{22}(\cdot) * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right] \downarrow D$$

donde $G'(\cdot, l) = G^{(-k, -l)}$.

En la figura 2.13 se tiene la imagen original de un teléfono. Para empezar se copia la imagen y se tiene $X^{(0)} = c_{1,\cdot}^{(0)} = c_{2,\cdot}^{(0)}$.

En la figura 5.2 se tienen 4 imágenes: son los coeficientes de un paso de la transformada multiwavelet: $d_{1,\cdot}^{(-1)}$ (arriba a la izquierda), $c_{1,\cdot}^{(-1)}$ (arriba derecha) and $d_{2,\cdot}^{(-1)}$ (abajo izquierda), $c_{2,\cdot}^{(-1)}$ (abajo derecha). La matriz de dilatación de esta transformada es D_1 . El efecto de una decimación o de un submuestreo con D_1 –en la fórmula de análisis– es el de reflejar y contraer la imagen.

En la figura 5.3 se tienen los coeficientes de 2 pasos de la misma transformada: $d_{1,\cdot}^{(-1)}$, $d_{1,\cdot}^{(-2)}$, $c_{1,\cdot}^{(-2)}$ (arriba) and $d_{2,\cdot}^{(-1)}$, $d_{2,\cdot}^{(-2)}$, $c_{2,\cdot}^{(-2)}$ (abajo). Después de 2 pasos la imagen recupera su orientación original. Si la matriz de dilatación es D_2 , se necesitan 8 pasos para volver a la orientación original de la imagen. Todas las imágenes este capítulo se obtuvieron con la transformada multiwavelet construida D1a1b1-094, así llamada por estar asociada a la matriz D_1 , tener aproximación polinomial de orden 1, y orden de balanceo 1 – ver tabla 6.7.

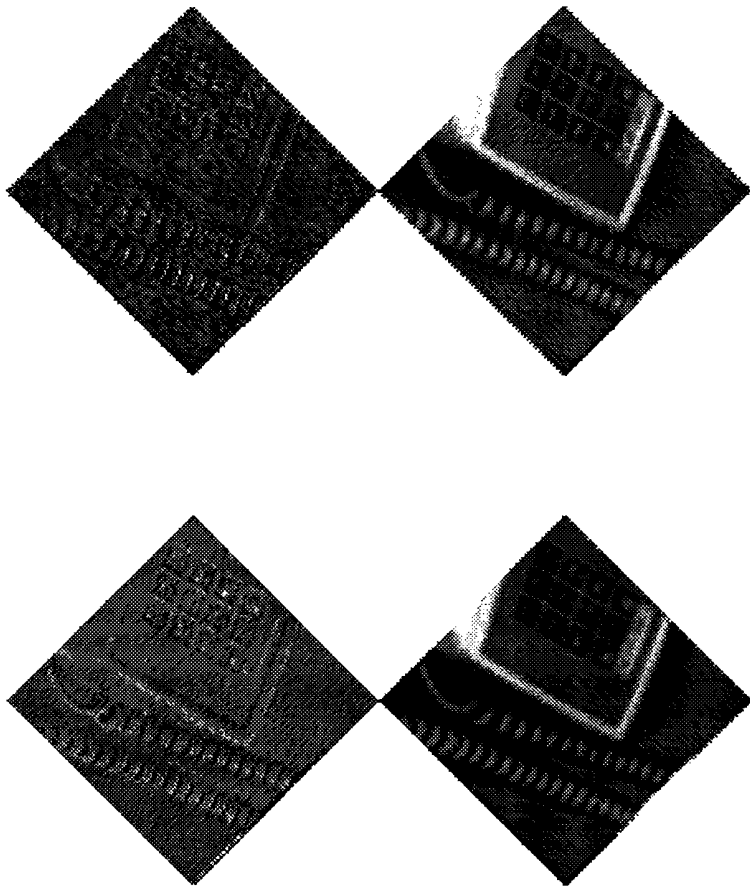


Figura 5.2: Un paso de la transformada multiwavelet

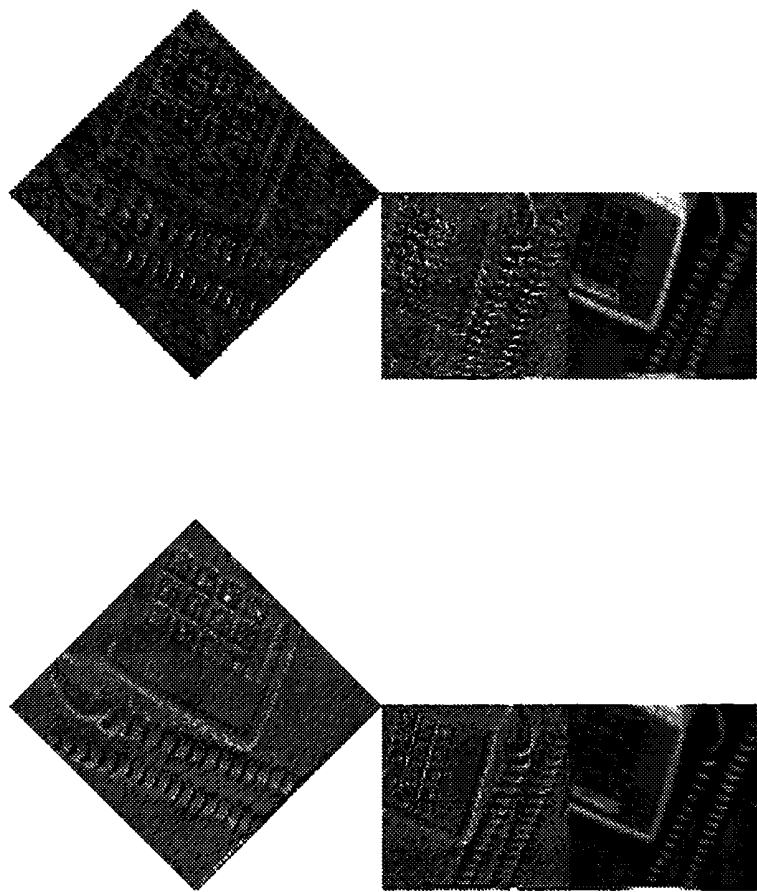


Figura 5.3: 2 pasos de la transformada multiwavelet

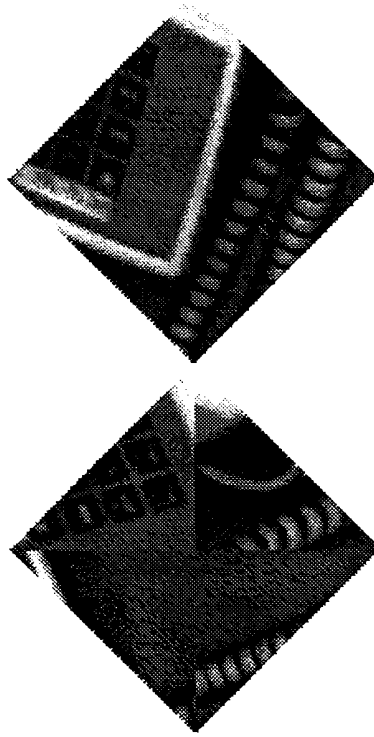


Figura 5.4: Descomposición de la imagen original en 2 rombos replegando bordes.

En cada paso, antes de procesar las imágenes, se debe periodizar las mismas, de lo contrario habrá artefactos en los bordes. La periodización es diferente si el marco de las imágenes es un cuadrado con los lados horizontales y verticales (esto sucede después de los pasos pares), o si el marco es un rombo (esto sucede después de los pasos impares).

5.3.1 Descomposición de una imagen en 2 imágenes de entrada

Para empezar a procesar una imagen con multiwavelets, se necesitan 2 imágenes de entrada. Se puede repetir el procedimiento anterior, haciendo 2 copias de la imagen original y procesándolas. Pero duplicar la información no es indicado si se quiere comprimir la imagen. Entonces se buscan maneras de descomponer una imagen original en 2 imágenes de entrada: no se puede dividir fácilmente una imagen cuadrada en 2 imágenes cuadradas.

A partir de las imágenes anteriores, se puede observar que cada 2 pasos, las imágenes tienen la disposición de un rombo. Por ejemplo, después de un paso de análisis se obtienen 2 matrices de coeficientes de aproximación, que tienen la disposición de un rombo: la cantidad de coeficientes de cada una de ellas es igual a la mitad de los coeficientes de la figura original. Una manera de inicializar el procedimiento, es entonces, descomponer la imagen original en 2 rombos, y arrancar a partir del segundo paso en cuanto a la disposición de las matrices.

Se podría construir un rombo recortando las esquinas de la imagen original, y con los recortes replegados armar el segundo rombo. Esto se llevó a cabo, –ver figura 5.4 – pero las imágenes que se obtuvieron después de realizar el primer paso (fig 5.5) no fueron satisfactorias. Esto se debe a que el algoritmo (5.8 y

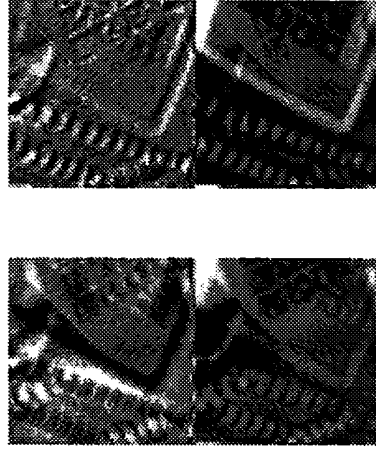


Figura 5.5: Un paso de la transformada después de separar replegando bordes.

5.9) mezcla la información de las 2 imágenes de entrada. El algoritmo de reconstrucción puede recuperar perfectamente las 2 imágenes de entrada, es decir, la *mezcla* no es irreversible. Pero si se quiere comprimir la imagen, y se pasa un umbral, entonces la imagen reconstruida tendrá errores o artefactos que se deben a la mezcla de información.

Para evitar estos errores, se debe tratar de que las 2 imágenes de entrada se parezcan lo más posible. Esto se logra separando la imagen original en 2 rombos según la subgrilla: en un rombo se tendrán los pixels - $c_{1,\cdot}^{(0)}$ - que pertenecen a la subgrilla Γ_0 , y en el segundo rombo se tendrán los pixels - $c_{2,\cdot}^{(0)}$ - que pertenecen a la subgrilla Γ_1 (ver figura 5.6).

$$\begin{aligned} c_{1,\cdot}^{(0)} &= X^{(0)} \downarrow D \\ c_{2,\cdot}^{(0)} &= (X^{(0)} * \partial_{-10}) \downarrow D \\ X^{(0)} &= [c_{1,\cdot}^{(0)} \uparrow D] + [\partial_{(10)} * (c_{2,\cdot}^{(0)} \uparrow D)]. \end{aligned}$$

Escribiendo esto último en términos de la transformada Z , se tiene

$$\begin{aligned} c_{1,\cdot}^{(0)}(z_1, z_2) &= \sum_{n=(j,k) \in Z^2} X_{Dn}^{(0)} z_1^{-j} z_2^{-k} \\ c_{2,\cdot}^{(0)}(z_1, z_2) &= \sum_{n=(j,k) \in Z^2} X_{Dn+(10)}^{(0)} z_1^{-j} z_2^{-k} \\ X^{(0)}(z) &= c_{1,\cdot}^{(0)}(z^D) + z_1^{-1} c_{2,\cdot}^{(0)}(z^D). \end{aligned}$$

Si se realiza un paso de la transformada multiwavelet sobre estas 2 imágenes de entrada, se obtendrán resultados altamente satisfactorios: comparar las figuras 5.7 y 5.5 .

Esta separación efectuada sobre los pixels de la señal original, según la subgrilla a la que pertenece, permite escribir las fórmulas de análisis de una tercer manera: igual que en el caso unidimensional, un banco de matrices-filtro de 2×2 es también la matriz polifase de 2 filtros; la única diferencia es que en nuestro caso los 2 filtros son bidimensionales.

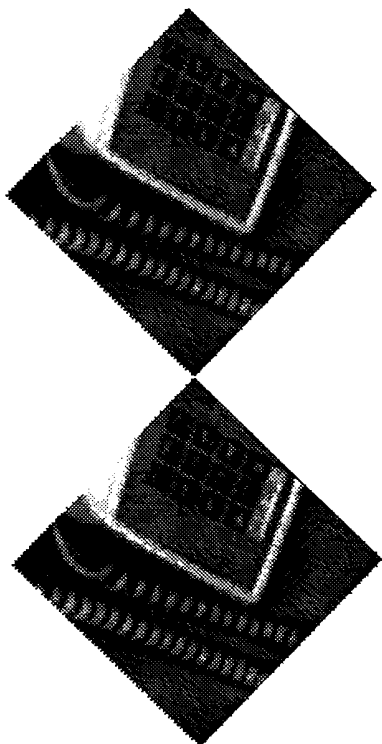


Figura 5.6: Separación de la imagen original en 2 imágenes según las subgrillas.

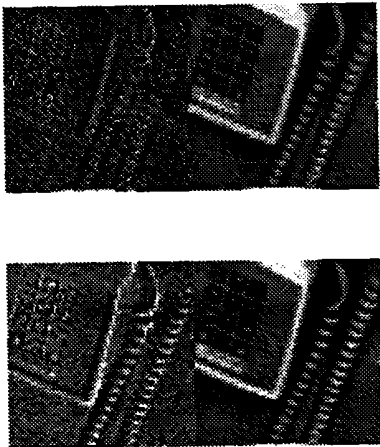


Figura 5.7: Primer paso de la transformada multiwavelet después de descomponer según las subgrillas.

Podemos escribir (5.13) como

$$c_{1,\cdot}^{(-1)} = [y_{1,\cdot}] \downarrow D \quad c_{2,\cdot}^{(-1)} = [y_{2,\cdot}] \downarrow D. \quad (5.15)$$

donde

$$\begin{aligned} y_{1,\cdot} &= \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left[\left(H_{11}^{(\cdot)} * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(H_{12}^{(\cdot)} * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right], \\ y_{2,\cdot} &= \frac{1}{\sqrt{|D|}} \left[\left(H_{21}^{(\cdot)} * c_{1,\cdot}^{(0)} \right) + \left(H_{22}^{(\cdot)} * c_{2,\cdot}^{(0)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, las transformadas Z de $y_{1,\cdot}$, $y_{2,\cdot}$ verifican

$$\begin{bmatrix} y_{1,\cdot}(z_1, z_2) \\ y_{2,\cdot}(z_1, z_2) \end{bmatrix} = P_{F_1, F_2} \begin{bmatrix} c_{1,\cdot}^{(0)}(z_1, z_2) \\ c_{2,\cdot}^{(0)}(z_1, z_2) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

donde

$$P_{F_1, F_2} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \begin{bmatrix} H_{11}^{(\cdot)}(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) & H_{12}^{(\cdot)}(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) \\ H_{21}^{(\cdot)}(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) & H_{22}^{(\cdot)}(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) \end{bmatrix}$$

es la matriz polifase de 2 filtros bidimensionales F_1 y F_2 . El filtro F_1 tiene coeficientes $H_{11}^{(\cdot)}$ en la subgrilla Γ_0 y coeficientes $H_{12}^{(\cdot)}$ en la subgrilla Γ_2 , mientras que el filtro F_2 tiene coeficientes $H_{21}^{(\cdot)}$ en la subgrilla Γ_2 y coeficientes $H_{22}^{(\cdot)}$ en la subgrilla Γ_2 . Escribiendo esto último, se tiene

$$F_1(z_1, z_2) = H_{11}^{(\cdot)}(z^D) + z_1^{-1} H_{12}^{(\cdot)}(z^D) \quad (5.17)$$

$$F_2(z_1, z_2) = H_{21}^{(\cdot)}(z^D) + z_1^{-1} H_{22}^{(\cdot)}(z^D) \quad (5.18)$$

donde

$$z^D = (z_1^{d_{11}} z_2^{d_{21}}, z_1^{d_{12}} z_2^{d_{22}}).$$

Para las matrices de dilatación elegidas, vale

$$z^{D_1} = (z_1 z_2, z_1 / z_2), \quad z^{D_2} = (z_1 z_2, z_2 / z_1).$$

Además, la ecuación 5.16 es equivalente a

$$y_{1,\cdot} = (X^{(0)} * F_1') \downarrow D \quad y_{2,\cdot} = (X^{(0)} * F_2') \downarrow D.$$

Reemplazando en las fórmulas 5.15, se obtienen $c_{1,\cdot}^{(-1)}$ y $c_{2,\cdot}^{(-1)}$ a partir de una convolución de la imagen original con los filtros bidimensionales F_1' y F_2' , seguida de dos pasos de submuestreo, que es lo mismo que un submuestreo con D^2

$$c_{1,\cdot}^{(-1)} = \left[(X^{(0)} * F_1') \downarrow D^2 \right], \quad (5.19)$$

$$c_{2,\cdot}^{(-1)} = \left[(X^{(0)} * F_2') \downarrow D^2 \right].$$

En forma similar, podemos escribir (5.14) como

$$d_{1,\cdot}^{(-1)} = [u_{1,\cdot}] \downarrow D \quad d_{2,\cdot}^{(-1)} = [u_{2,\cdot}] \downarrow D. \quad (5.20)$$

Ahora las transformadas Z de $u_{1,\cdot}$, $u_{2,\cdot}$ cumplen

$$\begin{bmatrix} u_{1,\cdot}(z_1, z_2) \\ u_{2,\cdot}(z_1, z_2) \end{bmatrix} = P_{I_1, I_2} \begin{bmatrix} c_{1,\cdot}^{(0)}(z_1, z_2) \\ c_{2,\cdot}^{(0)}(z_1, z_2) \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

donde

$$P_{I_1, I_2} = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \begin{bmatrix} G_{11}^{(\cdot)}(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) & G_{12}^{(\cdot)}(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) \\ G_{21}^{(\cdot)}(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) & G_{22}^{(\cdot)}(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) \end{bmatrix}$$

es la matriz polifase de 2 filtros bidimensionales I_1 y I_2 . El filtro I_1 tiene coeficientes $G_{11}^{(\cdot)}$ en la subgrilla Γ_1 y coeficientes $G_{12}^{(\cdot)}$ en la subgrilla Γ_2 , mientras que el filtro I_2 tiene coeficientes $G_{21}^{(\cdot)}$ en la subgrilla Γ_2 y coeficientes $G_{22}^{(\cdot)}$ en la subgrilla Γ_2 . Escribiendo esto último, tenemos

$$\begin{aligned} I_1(z_1, z_2) &= G_{11}^{(\cdot)}(z^D) + z_1^{-1} G_{12}^{(\cdot)}(z^D) \\ I_2(z_1, z_2) &= G_{21}^{(\cdot)}(z^D) + z_1^{-1} G_{22}^{(\cdot)}(z^D). \end{aligned}$$

Además, la ecuación 5.21 es equivalente a

$$u_{1,\cdot} = (X^{(0)} * I'_1) \downarrow D \quad u_{2,\cdot} = (X^{(0)} * I'_2) \downarrow D.$$

Reemplazando en las fórmulas 5.20, se obtienen los coeficientes de detalle $d_{1,\cdot}^{(-1)}$ y $d_{2,\cdot}^{(-1)}$ a partir de una convolución de la imagen original con los filtros bidimensionales I'_1 y I'_2 , seguida de un submuestreo con D^2

$$\begin{aligned} d_{1,\cdot}^{(-1)} &= [(X^{(0)} * I'_1) \downarrow D^2], \\ d_{2,\cdot}^{(-1)} &= [(X^{(0)} * I'_2) \downarrow D^2]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nota 5.2. Hemos escrito las fórmulas de análisis, que permiten calcular los coeficientes de aproximación $c_{1,\cdot}^{(-1)}$ y $c_{2,\cdot}^{(-1)}$ y los coeficientes de detalle $d_{1,\cdot}^{(-1)}$ y $d_{2,\cdot}^{(-1)}$, de 3 maneras diferentes:

1. como productos de las matrices filtro por vectores: ecuaciones 5.8 y 5.9,
2. como la suma de 2 convoluciones bidimensionales seguidas de un submuestreo con D : ecuaciones 5.13 y 5.14,
3. como una convolución bidimensional de la señal original seguida de un submuestreo con D^2 : ecuaciones 5.19 y 5.22. En este caso el banco de filtros tiene 4 canales.

En la segunda opción, para calcular los coeficientes de aproximación, se opera con los reversos de 4 filtros distintos, los $H_{ij}^{(\cdot)}$. Cada filtro está formado por los elementos de $H^{(k)}$ que están en una misma posición: por ejemplo,

$$H_{11}^{(\cdot)} = \begin{bmatrix} 0 & H_{11}^{(1,1)} & H_{11}^{(2,1)} & 0 \\ H_{11}^{(0,0)} & H_{11}^{(1,0)} & H_{11}^{(2,0)} & H_{11}^{(3,0)} \\ 0 & H_{11}^{(1,-1)} & H_{11}^{(2,-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

es un filtro.

En la tercera opción, para calcular los coeficientes de aproximación, se opera con los reversos de 2 filtros distintos, F_1 y F_2 , llamados filtros polifase. Cada filtro está formado por los elementos que están en una misma fila de las matrices $H^{(k)}$: por ejemplo, reemplazando en la ecuación 5.17 para $D = D_1$, se tiene el filtro F_1 :

$$F_1 = \begin{bmatrix} [F_1]_{02} & [F_1]_{12} & [F_1]_{22} & [F_1]_{32} \\ [F_1]_{-1,1} & [F_1]_{01} & [F_1]_{11} & [F_1]_{21} \\ [F_1]_{00} & [F_1]_{10} & [F_1]_{20} & [F_1]_{30} \\ [F_1]_{-1,-1} & [F_1]_{0,-1} & [F_1]_{1,-1} & [F_1]_{2,-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_{11}^{(2,-1)} & H_{12}^{(2,-1)} & H_{11}^{(30)} & H_{12}^{(30)} \\ H_{11}^{(1,-1)} & H_{12}^{(1,-1)} & H_{11}^{(20)} & H_{12}^{(20)} \\ H_{11}^{(10)} & H_{12}^{(10)} & H_{11}^{(21)} & H_{12}^{(21)} \\ H_{11}^{(00)} & H_{12}^{(00)} & H_{11}^{(11)} & H_{12}^{(11)} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, si bien con una transformada multiwavelet no separable el procesamiento de una imagen es computacionalmente más complejo que el del caso separable y con factor de escala 2, se puede ver que con el procesamiento indicado, la cantidad de coeficientes de la transformada multiwavelet es igual a la cantidad de pixels de la imagen original, y no necesitan más espacio para su almacenamiento.

Capítulo 6

Propiedades de las multiwavelets no separables

Toda la información de las multifunciones de escala y de las multiwavelets está concentrada en las matrices-filtro $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$ de las ecuaciones 5.3 y 5.6. Hemos visto que para calcular la transformada multiwavelet se utilizan únicamente $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$. Y también veremos en 7.3 que con estos valores se puede obtener numéricamente una aproximación al gráfico de las funciones de escala y de las multiwavelets. Es por ello que para construir las multiwavelets nos concentramos en obtener valores para $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$. En este capítulo se analiza cada propiedad de las multifunciones de escala y de las multiwavelets, como la ortogonalidad, la aproximación polinomial, el balanceo, etc... Cada propiedad se traduce en condiciones sobre las matrices-filtro $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$. También se traduce en condiciones sobre los autovalores de las matrices $S_i^{(jl)}$, y sobre sus autovectores a izquierda y derecha. Estas condiciones se usan luego para construir las funciones deseadas.

A medida que se analizan las diferentes propiedades de las multiwavelets, se hacen referencias a los ejemplos construidos que cumplen esa propiedad. La construcción de las multiwavelets se realizó de la siguiente manera: una vez fijadas las condiciones que se querían imponer sobre las matrices-filtro $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$, se planteó el sistema de ecuaciones no lineales correspondiente, con las incógnitas $H_{i,j}^{(k)}$ y $G_{i,j}^{(k)}$. Este sistema se resolvió mediante el método de optimización no lineal de cuadrados mínimos. Más adelante daremos más detalles sobre esta construcción.

Al estudiar las diferentes propiedades, se analizan sus consecuencias y las relaciones entre propiedades. Veremos, por ejemplo, que el balanceo de orden 1 implica la aproximación polinomial de orden 1. En cambio, las propiedades de balanceo de orden 2 y $\nabla F(-1, -1) = 0$ son mutuamente excluyentes. Esta información es tomada en cuenta al construir las multiwavelets.

A continuación damos un lema que es consecuencia de las ecuaciones 5.3 y 5.6.

Lema 6.1. *Dadas una multifunción de escala (Φ_1, Φ_2) , y una multiwavelet (Ψ_1, Ψ_2) , se verifican:*

$$\begin{aligned} \bullet \quad S^{(00)} \begin{bmatrix} \int \Phi_1 \\ \int \Phi_2 \end{bmatrix} &= |D| \begin{bmatrix} \int \Phi_1 \\ \int \Phi_2 \end{bmatrix} \\ \bullet \quad T^{(00)} \begin{bmatrix} \int \Phi_1 \\ \int \Phi_2 \end{bmatrix} &= |D| \begin{bmatrix} \int \Psi_1 \\ \int \Psi_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Demostración. Integrando la ecuación 5.3 se obtiene (1). Integrando la ecuación 5.6 se obtiene (2). □

Nota 6.1. Para las matrices de dilatación consideradas vale $|D| = 2$. Luego $\lambda = 2$ es autovalor de $S^{(00)}$.

6.1 Existencia de la función de escala

Forma Fourier de la ecuación de dilatación:

Si se transforma Fourier las ecuaciones de dilatación 5.1 y 5.2, resulta

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1(w) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N e^{-i\langle (D^{-1})^T w, k \rangle} \left[H_{11}^{(k)} \hat{\Phi}_1 \left((D^{-1})^T w \right) + H_{12}^{(k)} \hat{\Phi}_2 \left((D^{-1})^T w \right) \right] \\ \hat{\Phi}_2(w) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N e^{-i\langle (D^{-1})^T w, k \rangle} \left[H_{21}^{(k)} \hat{\Phi}_1 \left((D^{-1})^T w \right) + H_{22}^{(k)} \hat{\Phi}_2 \left((D^{-1})^T w \right) \right],\end{aligned}$$

luego

$$\hat{\Phi}(w) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^N e^{-i\langle (D^{-1})^T w, k \rangle} H^{(k)} \right] \hat{\Phi} \left((D^{-1})^T w \right),$$

y

$$\hat{\Phi}(w) = \tilde{H} \left((D^{-1})^T w \right) \hat{\Phi} \left((D^{-1})^T w \right). \quad (6.1)$$

Aplicando varias veces la igualdad anterior,

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(w) &= \tilde{H} \left((D^{-1})^T w \right) \tilde{H} \left((D^{-2})^T w \right) \hat{\Phi} \left((D^{-2})^T w \right) = \dots \\ &= \left\{ \prod_{n=1}^M \tilde{H} \left((D^{-n})^T w \right) \right\} \hat{\Phi} \left((D^{-M})^T w \right).\end{aligned}$$

y tomando límite cuando $M \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\hat{\Phi}(w) = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \tilde{H} \left((D^{-n})^T w \right) \right\} \hat{\Phi}(0,0) \quad (6.2)$$

Este producto infinito de matrices, multiplicado por $\hat{\Phi}(0,0)$, debe ser convergente. En particular, si $w = (0,0)$

$$\hat{\Phi}(0,0) = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \tilde{H}(0,0) \right\} \hat{\Phi}(0,0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\tilde{H}(0,0)]^n \hat{\Phi}(0,0). \quad (6.3)$$

Para que las potencias X^n de una matriz X de 2×2 converjan a un límite, es necesario y suficiente que se cumpla una de las siguientes condiciones:

- la matriz X es la identidad, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, y en ese caso el límite es I ,
- los autovalores de la matriz X cumplen $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$, y en ese caso el límite es la matriz nula,
- los autovalores de la matriz X cumplen $\lambda_1 = 1$ y $|\lambda_2| < 1$, y en ese caso el límite es la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix},$$

donde A es la matriz de autovectores de X , $B = A^{-1}$, y

$$X = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} B.$$

Para la matriz $X = \tilde{H}(0,0)$, el segundo caso queda descartado, porque $\tilde{H}(0,0)$ tiene un autovalor igual a 1.

$$\tilde{H}(0,0) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \Lambda} H^{(k)} = \frac{1}{2} S^{(00)}$$

y $S^{(00)}$ tiene un autovalor igual a 2 –ver nota 6.1. Entonces $\tilde{H}(0,0)$ tiene un autovalor $\lambda_1 = 1$.

Resumiendo, si la matriz $\tilde{H}(0,0) = I$, ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$), o si el otro autovalor de $\tilde{H}(0,0)$ es menor que 1 en módulo, ($\lambda_1 = 1$, y $|\lambda_2| < 1$), tenemos asegurada la existencia del límite en 6.3. Sin embargo, existen otras situaciones, en las que el $\lim_{n \rightarrow \infty} [\tilde{H}(0,0)]^n$ no existe, y sin embargo existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} [\tilde{H}(0,0)]^n \hat{\Phi}(0,0)$: por ejemplo,

$$\tilde{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Phi}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este caso se estudia más adelante, en la sección 8.6.

6.2 Condiciones de ortogonalidad

La ventaja de trabajar con una transformada ortonormal, es que tanto la compresión de imágenes como su transmisión progresiva, son procesos estables. Se realiza la compresión de una imagen calculando su transformada wavelet y descartando los coeficientes más pequeños en valor absoluto. Si las bases forman un conjunto ortonormal, entonces el MSE (error cuadrático medio) de la imagen reconstruida es igual al promedio de los cuadrados de los coeficientes descartados.

Si $\{\Phi_1(x-k), \Phi_2(x-l)\}_{k,l \in \mathbb{Z}^2}$ es un sistema ortonormal,

$$\langle \Phi_i(x-k), \Phi_j(x-l) \rangle = \partial_{i,j} \partial_{k,l} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad k, l \in \mathbb{Z}^2 \quad (6.4)$$

entonces se deduce la siguiente condición sobre las matrices $H^{(k)}$:

$$\sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} H^{(k)} [H^{(k+Dj)}]^T = \begin{cases} |D| I & \text{si } j = (j_1, j_2) = (0,0) \\ 0 & \text{si } j = (j_1, j_2) \neq (0,0) \end{cases} \quad (6.5)$$

La condición de ortonormalidad de las wavelets y sus traslaciones enteras, es decir

$$\langle \Psi_i(x-k), \Psi_j(x-l) \rangle = \partial_{i,j} \partial_{k,l} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad k, l \in \mathbb{Z}^2 \quad (6.6)$$

implican

$$\sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} G^{(k)} [G^{(k+Dj)}]^T = \begin{cases} |D| I & \text{if } (j_1, j_2) = (0,0) \\ 0 & \text{if } (j_1, j_2) \neq (0,0) \end{cases} \quad (6.7)$$

Por último, si las multifunciones de escala –y sus corrimientos enteros– son ortogonales a las wavelets –con sus corrimientos enteros–.

$$\langle \Phi_i(x-k), \Psi_j(x-l) \rangle = 0 \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad k, l \in \mathbb{Z}^2 \quad (6.8)$$

entonces se puede deducir:

$$\sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} G^{(k)} [H^{(k+Dj)}]^T = 0 \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}^2. \quad (6.9)$$

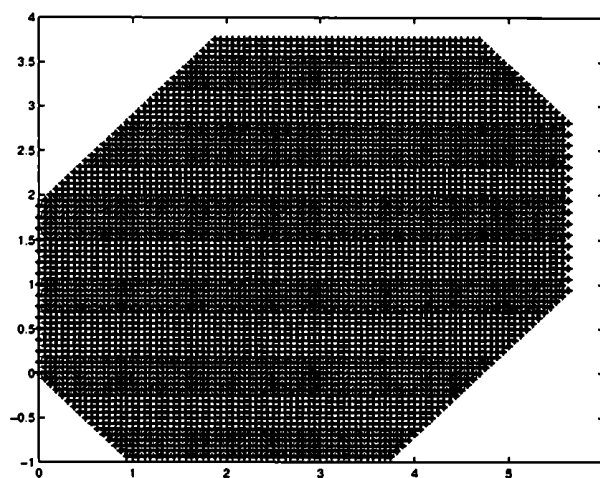


Figura 6.1: Conjunto incluido en los soportes de Φ_1 y Φ_2 de D1a2b0-001.

6.3 Soporte compacto (localización en el tiempo)

Se trabaja con finitas matrices-filtro $H^{(k)}$, por lo tanto el soporte de las funciones de escala es un conjunto compacto (ver [50]). Y si el soporte de las funciones de escala es compacto, y hay finitas matrices-filtro $G^{(k)}$, se deduce que el soporte de las wavelets también es un compacto.

Los soportes de Φ_1 y de Φ_2 están incluidos en el conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$, donde S depende de Λ y verifica – ver [55]–

$$S = \bigcup_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} D^{-1} \{S + k\} = D^{-1} \{S + \Lambda\}.$$

Cuanto mayor es el número de matrices $H^{(k)}$, mayor es el soporte.

En la figura 6.1 se tiene un gráfico estimativo del soporte de las multifunciones de escala D1a2b0-001: primero se realizó un gráfico de las funciones Φ_1 y Φ_2 con un algoritmo iterativo de 8 iteraciones –ver 7.3 – y luego se graficaron los puntos en los cuales las funciones son no nulas. Estos puntos pertenecen al soporte de Φ_1 y Φ_2 . En [55] se realizó el gráfico del conjunto S , que es un polígono similar al conjunto de la figura 6.1, salvo que el borde superior de S llega a alcanzar el valor $x_2 = 4.$, y su borde derecho alcanza el valor $x_1 = 6$. El soporte no depende en sí de los valores de $H^{(k)}$, siempre que sean no nulos, sino de la distribución de los índices Λ y de la matriz de dilatación. Las multifunciones de escala que tienen el mismo conjunto de índices Λ de 5.5 y la misma matriz de dilatación D_1 , a saber, D1a1b1-094, D1a1b1-081, D1a2b1-092 y D1a3b1-091, tienen su soporte incluido en el mismo conjunto S , y el gráfico del soporte es similar al de la figura 6.1.

6.4 Aproximación polinomial

Las funciones de escala que pueden reproducir en forma exacta a los polinomios de determinado orden – cuanto más elevado, mejor – son apropiadas para la compresión de imágenes. Si un polinomio pertenece a V_0 localmente, y calcula su transformada wavelet, toda la información queda en los coeficientes de

aproximación, y los detalles son cero. Si una imagen tiene variaciones continuas de color – función suave – entonces al procesarla tendrá muchos coeficientes de detalle nulos o muy pequeños, y ésto se puede aprovechar para la compresión.

Definición 6.1. Decimos que $\Phi(x)$ tiene *aproximación polinomial (accuracy) de orden m* si todo polinomio $p(x)$ de grado menor que m puede escribirse como:

$$p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \alpha_k^T \Phi(x - k) \quad (6.10)$$

donde α_k es un vector columna de 2 elementos.

Cabrelli, Heil y Molter obtuvieron condiciones para la aproximación polinomial de multifunciones de escala de varias variables en [56] y [53]. Las transcribimos para el caso de 2 funciones de escala. Una multifunción de escala ortogonal (Φ_1, Φ_2) de soporte compacto tiene orden de aproximación polinomial m si y solo si existen vectores columna de 2 elementos: $v_{00}, v_{10}, v_{01}, v_{11}, \dots, v_{q_1, q_2}$, ($q = (q_1, q_2)$, $|q| = q_1 + q_2 < m$) tales que

$$v_q^T = \sum_{t=0}^p \sum_{|\beta|=t} \sum_{|\gamma|=t} (-1)^{p-t} \binom{q}{\beta} D_{\sigma(\beta), \sigma(\gamma)}^{[t]} v_\gamma^T \sum_{k \in \Gamma_i} k^{(q-\beta)} H^{(k)}, \quad (6.11)$$

para

$$\begin{aligned} 0 &\leq p < m \\ |q| &= p \\ i &= 0, 1, \end{aligned}$$

donde

$$\binom{q}{\beta} = \begin{cases} \binom{q_1}{\beta_1} \binom{q_2}{\beta_2} & \text{si } \beta_1 \leq q_1 \text{ y } \beta_2 \leq q_2 \\ 0 & \text{si para algún } i, \beta_i > q_i \end{cases}.$$

A continuación se dan las primeras matrices $D^{[t]}$ y el orden σ para calcular los índices de $D^{[t]}$:

$$\begin{aligned} D^{[0]} &= 1, \\ \sigma(0, 0) &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{[1]} &= D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \\ \sigma(1, 0) &= 1, \\ \sigma(0, 1) &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{[2]} &= \begin{bmatrix} d_{11}^2 & 2d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \\ d_{11}d_{21} & d_{12}d_{21} + d_{11}d_{22} & d_{11}d_{22} \\ d_{21}^2 & 2d_{21}d_{22} & d_{22}^2 \end{bmatrix}, \\ \sigma(2, 0) &= 1, \\ \sigma(1, 1) &= 2, \\ \sigma(0, 2) &= 3. \end{aligned}$$

Con la notación introducida, la ecuación 6.11 puede escribirse

$$v_q^T = \sum_{t=0}^p \sum_{|\beta|=t} \sum_{|\gamma|=t} (-1)^{p-t} \binom{q}{\beta} D_{\sigma(\beta), \sigma(\gamma)}^{[t]} v_\gamma^T S_i^{(q-\beta)}, \quad \text{para } \begin{cases} 0 \leq p < m \\ |q| = p \\ i = 0, 1 \end{cases}$$

A continuación se da una lista de las condiciones para la aproximación polinomial de orden $p \leq 3$, para una matriz de dilatación D de 2×2 .

En lo sucesivo $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ son funciones de soporte compacto que verifican (6.4), y $v_{00}, v_{10}, v_{01}, v_{20}, y, v_{02}$ son vectores columna de 2 elementos.

Si existe un vector v_{00} que verifica:

$$v_{00}^T = v_{00}^T S_i^{(00)} \quad i = 0, 1 \quad v_{00}^T \neq [0, 0] \quad (6.12)$$

entonces hay aproximación polinomial de orden 1.

Si existen 3 vectores v_{00}, v_{10}, v_{01} que verifican (6.12) y las siguientes 2 ecuaciones:

$$v_{10}^T = -v_{00}^T S_i^{(10)} + (d_{11} v_{10} + d_{12} v_{01})^T S_i^{(00)} \quad i = 0, 1 \quad (6.13)$$

$$v_{01}^T = -v_{00}^T S_i^{(01)} + (d_{21} v_{10} + d_{22} v_{01})^T S_i^{(00)} \quad i = 0, 1 \quad (6.14)$$

entonces hay aproximación polinomial de orden 2.

Si existen vectores $v_{00}, v_{10}, v_{01}, v_{20}, v_{11}, v_{02}$ que verifican (6.12), (6.13), (6.14), más las siguientes 3 ecuaciones:

$$v_{20}^T = v_{00}^T S_i^{(20)} - 2(d_{11} v_{10} + d_{12} v_{01})^T S_i^{(10)} + \{d_{11}^2 v_{20} + 2d_{11} d_{12} v_{11} + d_{12}^2 v_{02}\}^T S_i^{(00)}, \quad i = 0, 1, \quad (6.15)$$

$$v_{11}^T = v_{00}^T S_i^{(11)} - (d_{21} v_{10} + d_{22} v_{01})^T S_i^{(10)} - (d_{11} v_{10} + d_{12} v_{01})^T S_i^{(01)} + \{d_{11} d_{21} v_{20} + (d_{12} d_{21} + d_{11} d_{22}) v_{11} + d_{11} d_{22} v_{02}\}^T S_i^{(00)}, \quad i = 0, 1, \quad (6.16)$$

$$v_{02}^T = v_{00}^T S_i^{(02)} - 2(d_{21} v_{10} + d_{22} v_{01})^T S_i^{(01)} + \{d_{21}^2 v_{20} + 2d_{21} d_{22} v_{11} + d_{22}^2 v_{02}\}^T S_i^{(00)} \quad i = 0, 1. \quad (6.17)$$

entonces hay aproximación polinomial de orden 3.

Nota 6.2. Los vectores v_q cumplen un rol fundamental en la aproximación de polinomios. A partir de ellos se obtienen los coeficientes de las combinaciones lineales de las traslaciones enteras de $\Phi_1(x)$ y $\Phi_2(x)$ para aproximar polinomios. Por ejemplo, para la aproximación de polinomios de grado ≤ 2 , se tiene (en lo sucesivo $x = (x_1, x_2)$):

$$1 = v_{00}^T \sum_{k=(k_1, k_2)} \Phi(x - k)$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sum_{k=(k_1, k_2)} [k_1 v_{00} + v_{10}]^T \Phi(x - k) \\
x_2 &= \sum_{k=(k_1, k_2)} [k_2 v_{00} + v_{01}]^T \Phi(x - k) \\
x_1^2 &= \sum_{k=(k_1, k_2)} [k_1^2 v_{00} + 2k_1 v_{10} + v_{20}]^T \Phi(x - k) \\
x_1 x_2 &= \sum_{k=(k_1, k_2)} [k_1 k_2 v_{00} + k_1 v_{01} + k_2 v_{10} + v_{11}]^T \Phi(x - k) \\
x_2^2 &= \sum_{k=(k_1, k_2)} [k_2^2 v_{00} + 2k_2 v_{01} + v_{02}]^T \Phi(x - k).
\end{aligned}$$

Lema 6.2. Si una multifunción de escala tiene aproximación polinomial de orden m , entonces todos los momentos r de las multiwavelets son nulos si $|r| < m$.

Demostración. Supongamos que $\Phi(x)$ tiene orden de aproximación m . Entonces para cada $r = (r_1, r_2)$, $0 \leq |r| < m$

$$x^r = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \alpha_k^T \Phi(x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{1,k} \Phi_1(x - k) + \alpha_{2,k} \Phi_2(x - k)$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $\Psi_1(x)$ e integrando, se obtiene

$$\int x^r \Psi_1(x) dx = 0 \quad 0 \leq |r| < m$$

puesto que $\Psi_1(x)$ es ortogonal a ambas funciones de escala. Es decir, los momentos r de orden menor que m de la wavelet $\Psi_1(x)$ son nulos. De manera análoga se procede con $\Psi_2(x)$. \square

En el lema que sigue se dan las propiedades que surgen de la aproximación polinomial 1 en el caso ortonormal.

Lema 6.3. Si (Φ, Ψ) cumplen las propiedades de ortonormalidad 6.4, 6.8, 6.6, y $\Phi(x)$ tiene aproximación polinomial de orden 1, entonces

1. Ambas matrices $S_1^{(00)}$ y $S_2^{(00)}$ tienen un autovalor $\lambda = 1$ y v_{00} es el autovector a izquierda asociado a $\lambda = 1$.
2. $v_{00}^T S^{(00)} = 2v_{00}^T$.
3. $1 = v_{00}^T \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \Phi(x - k)$.
4. $v_{00}^T = [\int \Phi_1(x) dx, \int \Phi_2(x) dx]$.
5. $S^{(00)} v_{00} = |D| v_{00}$.
6. $\int \Psi_i(x) dx = 0$ para $i = 1, 2$.
7. $T^{(00)} v_{00} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Aproximation of $P=x^2/2-1$ with integer translates of Scaling Function Φ

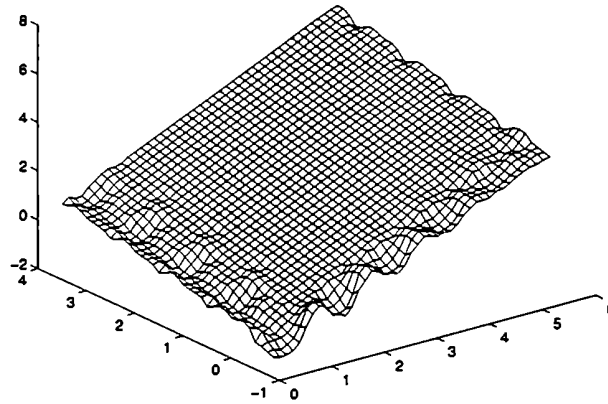


Figura 6.2: Plano aproximado por D1a2b0-001.

Demostración. 1. Surge inmediatamente de la ecuación (6.12).

2. Sumando las ecuaciones (6.12) para cada subgrilla, se obtiene (2).

3. Si $p(x) = 1$ en la ecuación (6.10) entonces $\alpha_k = v_{00}$ (ver demostración del teorema 3.11 en [56].

4. Multiplicar 3. en el lema 6.3 por $\Phi_1(x)$ e integrar. Repetir para $\Phi_2(x)$.

5. Aplicar lema 6.1

6. Multiplicar 3. en el lema 6.3 por $\Psi_1(x)$ e integrar. Repetir para $\Psi_2(x)$.

7. Aplicar el lema 6.1 y 6. en el lema 6.3. Notar que para las demostraciones de los items 1., 2. y 3. no se utilizaron las hipótesis de ortonormalidad.

□

En [57] se usaron las condiciones (6.5) y (6.12) a (6.17) con el objetivo de encontrar ejemplos de multifunciones de escala ortogonales, no separables, de aproximación polinomial 2 y 3. También se hallaron las multiwavelets asociadas, aplicando las condiciones (6.7) y (6.9). Se obtuvieron los ejemplos D1a2b0-001 y D2a3b0-009 – ver tabla 6.7.

La multifunción de escala D1a2b0-001 es continua y está asociada a la matriz de dilatación D_1 y tiene aproximación polinomial de orden 2. En la figura 6.2 se observa la aproximación de un plano por medio de traslaciones enteras de las funciones de escala Φ_1 y Φ_2 de esta transformada.

6.5 Condición de balanceo

Lebrun, Vetterli [40] [58] y Selesnick [41] introdujeron el concepto de multiwavelets balanceadas de diferentes órdenes y analizaron sus implicaciones en el caso unidimensional. La necesidad de introducir multiwavelets balanceadas surge de un cierto desequilibrio que se observa al procesar señales constantes, cuando las integrales de Φ_1 y de Φ_2 no son iguales: en ese caso, al procesar 2 señales constantes idénticas, se obtiene en los coeficientes de aproximación 2 señales constantes, pero diferentes. Para subsanar este

inconveniente es indispensable realizar un paso previo de prefiltrado de la señal, lo cual es costoso en cantidad de operaciones.

Las multiwavelets son balanceadas de orden 1 si al procesar 2 señales constantes e idénticas se obtienen coeficientes de aproximación iguales –salvo una constante– a las señales de entrada, mientras que los coeficientes de detalle son nulos. Es decir, la rama de análisis pasa-bajos en el esquema 5.1 preserva 2 señales (imágenes, en nuestro caso) constantes e idénticas, y la rama de análisis pasa-altos del esquema las anula.

Definición 6.2. Una multiwavelet – o una multifunción de escala – se dice balanceada de orden 1 si

$$c_{\cdot,k}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall k \in Z^2 \iff \begin{cases} c_{\cdot,k}^{(-1)} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall k \in Z^2; \text{ donde } a_1 \text{ es constante } > 0 \\ d_{\cdot,k}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k \in Z^2 \end{cases}$$

Teorema 6.1. • Si la multiwavelet es balanceada de orden 1,

• se verifican las condiciones de ortogonalidad, y

• $|D| = 2$,
entonces

1. $a_1 = \sqrt{2}$,

2. $S^{(00)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S_i^{(00)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ para $i = 0, 1$.

Demostración. Primero reemplazar

$$c_k^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_k^{(-1)} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

en la ecuación (5.8), para obtener

$$S^{(00)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \sqrt{|D|} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Segundo, reemplazar

$$c_k^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c_k^{(-1)} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ y } d_k^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en la ecuación (5.10). Notar que para k fijo, $k - Dj$ pertenece a una misma subgrilla, obteniéndose

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{a_1}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \Gamma_i} H_j^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trasponer para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S_i^{(00)} = \frac{\sqrt{|D|}}{a_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sumar sobre ambas subgrillas, y ver que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S^{(00)} = 2 \frac{\sqrt{|D|}}{a_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De lo anterior se sigue que la matriz $S^{(00)}$, que es de 2×2 , tiene los autovalores: i) $a_1 \sqrt{|D|}$ ii) $2 \frac{\sqrt{|D|}}{a_1}$ iii) $|D|$ (lema 6.1). Por lo menos 2 de estos autovalores deben ser iguales. Recordar que $|D| = 2$, y concluir que $a_1 = \sqrt{2}$. El resto de la demostración es inmediato. \square

Nota 6.3. Si una multifunción de escala es balanceada de orden 1 entonces tiene aproximación polinomial de orden 1. La implicación inversa no es verdadera.

Nota 6.4. Imponiendo las condiciones de ortogonalidad (6.5), (6.7) y (6.9), de aproximación polinomial (6.12) a (6.17), más las condiciones (2) y (3) del teorema 6.1, en el artículo [59] se obtuvieron ejemplos de funciones de escala y multiwavelets ortogonales, de aproximación polinomial 2 y 3, y balanceadas de orden 1: D1a2b1-092, D2a2b1-095, D1a3b1-091, –ver 6.7. El nombre de la multiwavelet D1a2b1-092 indica i) la matriz de dilatación asociada D_1 , ii) el orden de aproximación polinomial (a_2), y iii) el orden de balanceo (b_1). Las 3 últimas cifras corresponden a un número de orden.

En [41] y [58] se definió, para las multiwavelets de una dimensión, el balanceo de orden 2 y el balanceo de órdenes superiores. Ahora extenderemos la definición de multiwavelets balanceadas de orden 2 para multiwavelets bidimensionales asociadas a cualquier matriz de dilatación D . La idea es que los polinomios de grado 1 discretizados sean preservados por el proceso de análisis: que toda la información quede en los coeficientes de aproximación, y que los coeficientes de detalle sean 0.

Aquí es donde aparecen 3 diferencias con respecto a los artículos mencionados. Primero, Selesnick, Lebrun y Vetterli trabajan con el balanceo de la señal separada en sus fases (pares o impares), y aquí trabajaremos, por una cuestión de mayor sencillez, con el balanceo de la señal repetida. Segundo, para estos autores, si la señal es un polinomio discretizado de orden 1, entonces en la rama pasa-bajos del paso de análisis se obtiene otro polinomio discretizado del mismo grado, o de grado menor. Solo algunos polinomios específicos se mantienen iguales. En cambio, aquí exigiremos que se obtenga siempre el mismo polinomio discretizado (pero submuestreado y eventualmente multiplicado por una constante). Tercero, en los trabajos mencionados no se tiene en cuenta el submuestreo. Esto no es importante en el caso de una dimensión, porque el submuestreo implica un corrimiento en los coeficientes, pero es muy importante cuando éste se realiza con una matriz de dilatación. Supongamos que la imagen original es un polinomio de grado 1 discretizado, y que se tienen 2 copias de esta imagen para transformar. Sabemos que un paso de la transformada wavelet refleja (en el caso de D_1) o rota la imagen (en el caso de D_2), entonces después del proceso de análisis esperamos obtener el mismo polinomio discretizado, pero espejado o rotado. Por consiguiente pediremos, para una multiwavelet balanceada de orden 2, que si $X_k^{(0)} = c_{1,k}^{(0)} = c_{2,k}^{(0)}$ ($k \in \mathbb{Z}^2$) es un polinomio discretizado de orden 1, entonces $c_{1,k}^{(-1)} = c_{2,k}^{(-1)} = a_2 c_{Dk}^{(0)}$.

Definición 6.3. Un sistema multiwavelet es *balanceado de orden 2*, si

- es balanceado de orden 1, y
- para todo $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, para $m = 1, 2$, y para algún $a_2 > 0$, verifica

$$c_k^{(0)} = k_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} c_k^{(-1)} = a_2 (Dk)_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ d_k^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Esto es equivalente a pedir que el polinomio de orden 1 discretizado sea preservado *antes* del submuestreo, por la rama pasa-bajos del proceso de análisis.

Teorema 6.2. *Si un sistema multiwavelet ortogonal es balanceado de orden 2, y $|D| = 2$, entonces valen las igualdades del teorema 6.1, y además*

1. $a_2 = \sqrt{2}$,
2. $S^{(10)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,
3. $S^{(01)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,
4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S_i^{(10)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ para $i = 0, 1$,
5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S_i^{(01)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ para $i = 0, 1$.

Demostración. Reemplazar

$$c_j^{(0)} = j_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } c_k^{(-1)} = a_2(Dk)_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en la ecuación (5.8), y con el cambio de variables $j - Dk = l$, se obtiene

$$a_2(Dk)_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{(Dk)_m}{\sqrt{|D|}} \sum_l H^{(l)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{|D|}} \sum_l l_m H^{(l)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

lo cual es equivalente a

$$\sqrt{|D|} \left(a_2 - \frac{2}{\sqrt{|D|}} \right) (Dk)_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = S^{(10)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ cuando } m = 1,$$

y a

$$\sqrt{|D|} \left(a_2 - \frac{2}{\sqrt{|D|}} \right) (Dk)_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = S^{(01)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ cuando } m = 2.$$

Las matrices $S^{(10)}$ y $S^{(01)}$ no pueden tener un autovector asociado a un autovalor que depende de k .

Luego $\left(a_2 - \frac{2}{\sqrt{|D|}} \right)$ debe ser cero, y hemos demostrado los incisos 2 y 3.

Ahora reemplazamos

$$c_k^{(0)} = k_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_j^{(-1)} = a_2(Dj)_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad d_j^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en la ecuación de síntesis 5.10,

$$k_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{a_2}{\sqrt{|D|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \left(H^{(k-Dj)} \right)^T (Dj)_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observar que en la sumatoria figura Dj , y no figura j . Sea $l = k - Dj$, el cual pertenece a una misma subgrilla para k fijo. Realizado el cambio de variable, trasponer y aplicar (3) del teorema 6.1, para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S_i^{(10)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ cuando } m = 1,$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S_i^{(01)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ cuando } m = 2.$$

□

Lema 6.4. Si valen las siguientes condiciones:

- el sistema multiwavelet es ortogonal,
- el orden de aproximación polinomial es 2,
- el orden de balanceo es 2
- $|D| = 2$

entonces los vectores v_{10} y v_{01} de las ecuaciones 6.13-6.17 verifican

$$\begin{bmatrix} v_{10}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{01}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Demostración. Sumar la ecuación 6.13 para $i = 0, 1$, y se llega a

$$2v_{10}^T = -v_{00}^T S^{(10)} + (d_{11}v_{10} + d_{12}v_{01})^T S^{(00)}.$$

Multiplicando la igualdad anterior a derecha por $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, y aplicando (2) del teorema 6.1 y (3) del teorema 6.2, se deduce

$$v_{10}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (d_{11}v_{10} + d_{12}v_{01})^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De manera similar, a partir de 6.14 se obtiene

$$v_{01}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (d_{21}v_{10} + d_{22}v_{01})^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uniendo las últimas 2 ecuaciones, se deduce que

$$\begin{bmatrix} v_{10}^T \\ v_{01}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} v_{10}^T \\ v_{01}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si el vector $\begin{bmatrix} v_{10}^T \\ v_{01}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es no nulo, esto significa que es autovector de D asociado al autovalor $\lambda = 1$, lo cual es absurdo. (Recordar que los autovalores de D son mayores que 1). Luego

$$\begin{bmatrix} v_{10}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{01}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

□

Nota 6.5. Se obtuvieron ejemplos de multifunciones de escala y multiwavelets balanceadas de orden 2, aplicando las condiciones (3), (4) y (5) del teorema 6.2: son las multiwavelets D1a2b2-299, D2a2b2-499, y D1a3b2-699 Ver referencias en la tabla 6.7.

6.6 Buena localización en las frecuencias

Daremos a continuación diferentes condiciones para que haya buena localización en las frecuencias. Como ya se dijo, en el procesamiento de señales con multiwavelets, se obtienen los coeficientes de aproximación a partir de las matrices-filtro $H^{(k)}$, pero no se pueden exigir las condiciones de filtro pasa-bajos a las matrices. Se fijan estas condiciones a los filtros bidimensionales en los cuales se traduce la transformada, según se trabaje con 4 filtros 5.13, o con 2 filtros polifase 5.19. Del mismo modo, se fija la condición de filtros pasa-altos a los filtros que participan en el cálculo de los coeficientes de detalle.

6.6.1 Cuatro filtros pasa-bajos

En el cálculo de los coeficientes de aproximación, según las fórmulas 5.13, participan 4 filtros $H'_{ij}(\cdot)$, con $i, j = 1, 2$. Si $H'_{ij}(\cdot)$ es un filtro pasa-bajos, entonces $H_{ij}(\cdot)$ también lo es, y su respuesta en frecuencias $\hat{H}_{ij}(\cdot)$ debe ser 0 en $w = (\pi, \pi)$. Entonces

$$\hat{H}_{ij}(\cdot)(\pi, \pi) = 0,$$

y

$$H_{ij}(\cdot)(-1, -1) = 0.$$

Si vale la fórmula anterior para $i, j = 1, 2$, es decir, los 4 filtros la cumplen, lo indicaremos en forma más abreviada como

$$H(-1, -1) = 0. \quad (6.18)$$

Si la derivada direccional de $\hat{H}_{ij}(\cdot)$ en el punto $w = (\pi, \pi)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces el gradiente

$$\nabla \hat{H}_{ij}(\cdot)(\pi, \pi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{H}_{ij}(\cdot)}{\partial w_1}(\pi, \pi) \\ \frac{\partial \hat{H}_{ij}(\cdot)}{\partial w_2}(\pi, \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

lo cual es equivalente a

$$\nabla H_{ij}(\cdot)(-1, -1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{ij}(\cdot)}{\partial z_1}(-1, -1) \\ \frac{\partial H_{ij}(\cdot)}{\partial z_2}(-1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si la fórmula anterior se cumple para los 4 filtros ($i, j = 1, 2$), lo indicaremos como

$$\nabla H(-1, -1) = 0. \quad (6.19)$$

De la misma manera, si la derivada direccional segunda de $\hat{H}_{ij}(\cdot)(w)$ en los puntos $w = (\pi, \pi)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces el Hessiano

$$\nabla^2 \hat{H}_{ij}(\cdot)(\pi, \pi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{H}_{ij}(\cdot)}{\partial w_1 \partial w_1}(\pi, \pi) & \frac{\partial^2 \hat{H}_{ij}(\cdot)}{\partial w_1 \partial w_2}(\pi, \pi) \\ \frac{\partial^2 \hat{H}_{ij}(\cdot)}{\partial w_2 \partial w_1}(\pi, \pi) & \frac{\partial^2 \hat{H}_{ij}(\cdot)}{\partial w_2 \partial w_2}(\pi, \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y por lo tanto

$$\nabla^2 H_{ij}^{(\cdot)}(-1, -1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_1 \partial z_1}(-1, -1) & \frac{\partial^2 H_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_1 \partial z_2}(-1, -1) \\ \frac{\partial^2 H_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_2 \partial z_1}(-1, -1) & \frac{\partial^2 H_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_2 \partial z_2}(-1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si la fórmula anterior se cumple para los 4 filtros $(i, j = 1, 2)$, lo indicaremos en forma abreviada como

$$\nabla^2 H(-1, -1) = 0. \quad (6.20)$$

Cuanto mayor sea el número de condiciones que se cumplan, más 'achatada' serán las respuestas en frecuencias de los filtros $H_{ij}^{(\cdot)}$ cerca de $w = (\pi, \pi)$, y mejor filtro pasa-bajos serán los $H_{ij}^{(\cdot)}$.

6.6.2 Cuatro filtros pasa-altos

En el cálculo de los coeficientes de detalle, según las fórmulas 5.14, participan 4 filtros $G_{ij}^{(\cdot)}$, con $i, j = 1, 2$. Si $G_{ij}^{(\cdot)}$ es un filtro pasa-altos, entonces $\widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}$ también lo es, y su respuesta en frecuencias $\widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}$ debe ser 0 en $w = (0, 0)$. Entonces

$$\widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}(0, 0) = 0,$$

y

$$G_{ij}^{(\cdot)}(1, 1) = 0.$$

Si vale la fórmula anterior para $i, j = 1, 2$, es decir, los 4 filtros la cumplen, lo indicaremos en forma más abreviada como

$$G(1, 1) = 0. \quad (6.21)$$

Si la derivada direccional de $\widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}$ en el punto $w = (0, 0)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces el gradiente

$$\nabla \widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_1}(0, 0) \\ \frac{\partial \widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_2}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si la fórmula anterior se cumple para los 4 filtros $(i, j = 1, 2)$, lo indicaremos como

$$\nabla \widehat{G}(0, 0) = 0. \quad (6.22)$$

De la misma manera, si la derivada direccional segunda de $\widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}(w)$ en los puntos $w = (0, 0)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces el Hessiano

$$\nabla^2 \widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_1 \partial z_1}(0, 0) & \frac{\partial^2 \widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_1 \partial z_2}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 \widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_2 \partial z_1}(0, 0) & \frac{\partial^2 \widehat{G}_{ij}^{(\cdot)}}{\partial z_2 \partial z_2}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si la fórmula anterior se cumple para los 4 filtros $(i, j = 1, 2)$, lo indicaremos en forma abreviada como

$$\nabla^2 G(1, 1) = 0. \quad (6.23)$$

Cuanto mayor sea el número de condiciones que se cumplan, más “achata” serán las respuestas en frecuencias de los filtros $G_{ij}^{(\cdot)}$ cerca de $w = (0, 0)$, y mejor filtro pasa-altos serán los $G_{ij}^{(\cdot)}$.

Nota 6.6. Se construyeron ejemplos de mutiwavelets que cumplen las condiciones 6.18 y 6.21, como el caso D1a3b1-298, y otras multiwavelets que cumplen más propiedades, como la multiwavelet D2a2b2-499 – que cumple 6.18, 6.19, 6.21 y 6.22– y las multiwavelets D1a3b1-691 y D2a3b1-699, que verifican 6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22, y 6.23. En la tabla 6.7 se listan sus propiedades.

6.6.3 Dos filtros polifase pasa-bajos

Para lograr que los filtros F'_1 y F'_2 de las fórmulas 5.19 sean buenos filtros pasa-bajos, exigimos la propiedad de filtro pasa-bajos:

$$\begin{aligned} \widehat{F}'_1(\pi, \pi) &= F'_1(-1, -1) = 0 \\ \widehat{F}'_2(\pi, \pi) &= F'_2(-1, -1) = 0, \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1(\pi, \pi) &= F_1(-1, -1) = 0 \\ \widehat{F}_2(\pi, \pi) &= F_2(-1, -1) = 0, \end{aligned}$$

Si las fórmulas anteriores se cumplen para $i = 1, 2$, lo indicaremos como

$$F(-1, -1) = 0. \quad (6.24)$$

De la ecuación 6.24 se obtiene la siguiente *condición de filtros polifase pasabajos* (para D_1 o D_2):

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} H_{11}^{(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} H_{12}^{(k)} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} H_{21}^{(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} H_{22}^{(k)}. \quad (6.25)$$

Si la derivada direccional de $\widehat{F}_i(w)$ en el punto $w = (\pi, \pi)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces para $i = 1, 2$ su gradiente verifica

$$\nabla F_i(-1, -1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial z_1}(-1, -1) \\ \frac{\partial F_i}{\partial z_2}(-1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y si se cumple para $i = 1, 2$, lo indicaremos como

$$\nabla F(-1, -1) = 0. \quad (6.26)$$

De la misma manera, si la derivada direccional segunda de $\widehat{F}_i(w)$ en los puntos $w = (\pi, \pi)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces su Hessiano verifica

$$\nabla^2 F_i(-1, -1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_i}{\partial z_1 \partial z_1}(-1, -1) & \frac{\partial^2 F_i}{\partial z_1 \partial z_2}(-1, -1) \\ \frac{\partial^2 F_i}{\partial z_2 \partial z_1}(-1, -1) & \frac{\partial^2 F_i}{\partial z_2 \partial z_2}(-1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si la fórmula anterior se cumple para $i = 1, 2$, lo indicaremos como

$$\nabla^2 F(-1, -1) = 0. \quad (6.27)$$

Cuanto mayor sea el número de condiciones que se cumplan, más “achataada” será la respuesta en frecuencias de F'_i cerca de $w = (\pi, \pi)$, y mejores filtros pasa-bajos serán F'_1 y F'_2 .

En un trabajo anterior [60] se construyeron multifunciones de escala y multiwavelets balanceadas con orden de aproximación polinomial 1 y 2, que cumplen con la condición 6.24: son las multiwavelets D1a1b1-081 y D2a2b1-081 de la tabla 6.7. La multiwavelet D1a1b1-070 también verifica esta misma condición, y verifica, además, la condición 6.26.

6.6.4 Dos filtros polifase pasa-altos

Para lograr que los filtros I'_1 y I'_2 de las fórmulas 5.22 sean buenos filtros pasa-altos, exigimos la propiedad de filtro pasa-altos:

$$\begin{aligned} \hat{I}'_1(0, 0) &= I'_1(1, 1) = 0 \\ \hat{I}'_2(0, 0) &= I'_2(1, 1) = 0, \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \hat{I}_1(0, 0) &= I_1(1, 1) = 0 \\ \hat{I}_2(0, 0) &= I_2(1, 1) = 0, \end{aligned}$$

Si las fórmulas anteriores se cumplen para $i = 1, 2$, lo indicaremos como

$$I(1, 1) = 0. \quad (6.28)$$

De la ecuación 6.28 se obtiene la siguiente *condición de filtros polifase pasa-altos* (para D_1 o D_2):

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} G_{11}^{(k)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} G_{12}^{(k)} = 0 \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} G_{21}^{(k)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} G_{22}^{(k)} = 0. \quad (6.29)$$

Veremos que esta condición no agrega ningún requerimiento a las multiwavelets balanceadas de orden 1 y de aproximación polinomial 1.

Si la derivada direccional de $\hat{I}_i(w)$ en el punto $w = (0, 0)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces para $i = 1, 2$ su gradiente verifica

$$\nabla I_i(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_i}{\partial z_1}(1, 1) \\ \frac{\partial I_i}{\partial z_2}(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y si se cumple para $i = 1, 2$, lo indicaremos como

$$\nabla I(1, 1) = 0. \quad (6.30)$$

De la misma manera, si la derivada direccional segunda de $\hat{I}_i(w)$ en los puntos $w = (0, 0)$ vale 0 en cualquier dirección, entonces su Hessiano verifica

$$\nabla^2 I_i(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I_i}{\partial z_1 \partial z_1}(1, 1) & \frac{\partial^2 I_i}{\partial z_1 \partial z_2}(1, 1) \\ \frac{\partial^2 I_i}{\partial z_2 \partial z_1}(1, 1) & \frac{\partial^2 I_i}{\partial z_2 \partial z_2}(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si la fórmula anterior se cumple para $i = 1, 2$, lo indicaremos como

$$\nabla^2 I(1, 1) = 0. \quad (6.31)$$

Cuanto mayor sea el número de condiciones que se cumplan, más “achatada” será la respuesta en frecuencias de I'_i cerca de $w = (0, 0)$, y mejores filtros pasa-altos serán I'_1 y I'_2 .

Lema 6.5. *Si un sistema multiwavelet es ortogonal, balanceado de orden 1 y tiene aproximación polinomial 1, entonces se verifica la condición de filtros polifase pasa-altos.*

Demostración. De las hipótesis se deduce que vale el lema 6.3, y del inciso 7 de dicho lema sale la condición 6.29. \square

Nota 6.7. Todas las multiwavelets balanceadas construídas de orden ≥ 1 de la tabla 6.7 verifican la condición 6.28, por eso se omite escribir esa propiedad. Las multiwavelets D2a3b1-699, D1a2b2-299, D2a2b2-499, D1a3b1-691, D2a3b1-061 y D1a3b2-699 verifican la condición 6.30.

A continuación veremos como se traducen algunas propiedades de los filtros polifase a las matrices $S^{(j)}$ definidas al principio del capítulo 5.

Lema 6.6. *Si una multiwavelet verifica $F(-1, -1) = 0$, entonces*

$$S^{(00)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Demostración. En las fórmulas 5.17 y 5.18 que definen a $F_1(z)$ y a $F_2(z)$ reemplazamos z por $z = (-1, -1)$. Como se puede observar en la fórmula 5.3.1, para cualquiera de las 2 matrices de dilatación contempladas, $z^D = (1, 1)$. Para un par de índices j, l fijo, se tiene

$$H_{jl}^{(\cdot)}(z_1, z_2) = \sum_{k \in \Lambda} H_{jl}^{(k_1, k_2)} z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}.$$

Luego

$$H_{jl}^{(\cdot)}(z^D) = H_{jl}^{(\cdot)}(1, 1) = \sum_{k \in \Lambda} H_{jl}^{(k_1, k_2)} = [S^{(00)}]_{jl}.$$

De las fórmulas 5.17 y 5.18, se deduce

$$\begin{aligned} F_1(-1, -1) &= H_{11}^{(\cdot)}(1, 1) - H_{12}^{(\cdot)}(1, 1) \\ &= [S^{(00)}]_{11} - [S^{(00)}]_{12} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(-1, -1) &= H_{21}^{(\cdot)}(1, 1) - H_{22}^{(\cdot)}(1, 1) \\ &= [S^{(00)}]_{21} - [S^{(00)}]_{22} = 0, \end{aligned}$$

con lo cual

$$S^{(00)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

\square

Lema 6.7. Si $D = D_1$ y $\nabla F(-1, -1) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} [S^{(10)} + S^{(01)}] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= S^{(00)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ [S^{(10)} - S^{(01)}] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $z^D = (u, v)$. Como $D = D_1$, por 5.3.1, $u = z_1 z_2$ y $v = z_1/z_2$. Derivando

$$F_i(z_1, z_2) = H_{i1}^{(\cdot)}(z^D) + z_1^{-1} H_{i2}^{(\cdot)}(z^D),$$

con respecto a z_1 y a z_2 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial z_1} &= \frac{\partial H_{i1}^{(\cdot)}(z^D)}{\partial z_1} + z_1^{-1} \frac{\partial H_{i2}^{(\cdot)}(z^D)}{\partial z_1} - z_1^{-2} H_{i2}^{(\cdot)}(z^D) \\ \frac{\partial F_i}{\partial z_2} &= \frac{\partial H_{i1}^{(\cdot)}(z^D)}{\partial z_2} + z_1^{-1} \frac{\partial H_{i2}^{(\cdot)}(z^D)}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}(z^D)}{\partial z_1} &= \frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z_1} \\ \frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}(z^D)}{\partial z_2} &= \frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z_2} + \frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}(u, v)}{\partial u} &= \sum_{k \in \Lambda} (-k_1) H_{jl}^{(k_1, k_2)} u^{-k_1-1} v^{-k_2} \\ \frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}(u, v)}{\partial v} &= \sum_{k \in \Lambda} (-k_2) H_{jl}^{(k_1, k_2)} u^{-k_1} v^{-k_2-1}, \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_1} &= z_2 & \frac{\partial v}{\partial z_1} &= 1/z_2 \\ \frac{\partial u}{\partial z_2} &= z_1 & \frac{\partial v}{\partial z_2} &= -z_1/z_2^2. \end{aligned}$$

Evalutando todo en $z_1 = -1, z_2 = -1$, se obtiene $u = 1, v = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_1} \Big|_{(-1, -1)} &= -1 & \frac{\partial v}{\partial z_1} \Big|_{(-1, -1)} &= -1 \\ \frac{\partial u}{\partial z_2} \Big|_{(-1, -1)} &= -1 & \frac{\partial v}{\partial z_2} \Big|_{(-1, -1)} &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}}{\partial u} \Big|_{(1,1)} = \sum_{k \in \Lambda} (-k_1) H_{jl}^{(k_1, k_2)} = -[S^{(10)}]_{jl}$$

$$\frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}}{\partial v} \Big|_{(1,1)} = \sum_{k \in \Lambda} (-k_2) H_{jl}^{(k_1, k_2)} = -[S^{(01)}]_{jl}$$

$$\frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}}{\partial z_1} \Big|_{(1,1)} = [S^{(10)} + S^{(01)}]_{jl}$$

$$\frac{\partial H_{jl}^{(\cdot)}}{\partial z_2} \Big|_{(1,1)} = [S^{(10)} - S^{(01)}]_{jl},$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_1} \Big|_{(-1,-1)} = [S^{(10)} + S^{(01)}]_{i1} - [S^{(10)} + S^{(01)}]_{i2} - [S^{(00)}]_{i2} = 0$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_2} \Big|_{(-1,-1)} = [S^{(10)} - S^{(01)}]_{i1} - [S^{(10)} - S^{(01)}]_{i2} = 0.$$

Y tomando $i = 1, 2$ en la expresión anterior se llega inmediatamente a la tesis. \square

Se manera similar se demuestra el siguiente lema para $D = D_2$:

Lema 6.8. Si $D = D_2$ y $\nabla F(-1, -1) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} [S^{(10)} - S^{(01)}] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= S^{(00)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ [S^{(10)} + S^{(01)}] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Veremos que algunas propiedades de las multiwavelets son mutuamente excluyentes: por ejemplo, el balanceo de orden 2 y $\nabla F(-1, -1) = 0$.

Teorema 6.3. No existe un sistema multiwavelet ortogonal -asociado a D_1 o a D_2 - que sea balanceado de orden 2 y que cumpla $\nabla F(-1, -1) = 0$.

Demostración. Sea $D = D_1$. Supongamos que la multiwavelet es balanceada de orden 2 y que

$$\nabla F(-1, -1) = 0.$$

Del teorema 6.2 se deduce

$$[S^{(10)} - S^{(01)}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y por el lema 6.7,

$$[S^{(10)} - S^{(01)}] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las filas de la matriz $S^{(10)} - S^{(01)}$ son ortogonales a los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ que forman una base de \mathfrak{R}^2 : luego $S^{(10)} - S^{(01)} = 0$, $S^{(10)} = S^{(01)}$ y reemplazando en el lema 6.7, resulta

$$2 S^{(10)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = S^{(00)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Multiplicando a izquierda los términos de la igualdad anterior por el vector $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, se obtiene

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S^{(10)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S^{(00)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Por un lado, sumando las dos ecuaciones del inciso 4 del teorema 6.2 para $i = 0, 1$, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S^{(10)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con lo cual el miembro izquierdo de la ecuación 6.33 es igual a 0. Por otro lado, sumando las dos ecuaciones del inciso 3 del teorema 6.1 para $i = 0, 1$, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S^{(00)} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

y reemplazando en la ecuación 6.33 se llega a

$$0 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2,$$

lo cual es absurdo. Luego no existe un sistema multiwavelet ortogonal asociado a D_1 que sea balanceado de orden 2 y que cumpla $\nabla F(-1, -1) = 0$.

Sea $D = D_2$. Supongamos otra vez que la multiwavelet es balanceada de orden 2 y que $\nabla F(-1, -1) = 0$. Del teorema 6.2 se deduce

$$\left[S^{(10)} + S^{(01)} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y por el lema 6.7,

$$\left[S^{(10)} + S^{(01)} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

luego $S^{(10)} = -S^{(01)}$ y reemplazando en el lema 6.7, resulta

$$2 S^{(10)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = S^{(00)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A partir de aquí la demostración se desarrolla en forma idéntica al caso $D = D_1$.

Luego no existe un sistema multiwavelet ortogonal asociado a D_1 o a D_2 que sea balanceado de orden 2 y que cumpla $\nabla F(-1, -1) = 0$. \square

6.7 Ejemplos

En la tabla 6.7 se listan algunas de las multiwavelets que se obtuvieron, con la cantidad de matrices-filtro que poseen, su orden de aproximación polinomial, el orden de balanceo, las propiedades de localización en las frecuencias, la estimación del radio espectral conjunto ρ , y el exponente de Hölder s . Los coeficientes de las multiwavelets se dan en el apéndice, así como sus gráficos —en la tabla se dan las referencias a las figuras correspondientes. En la sección 7.1 se verá, más adelante, cómo se construyeron estos ejemplos.

El nombre de la multiwavelet D1a3b2-699 indica que ella está asociada a la matriz de dilatación D_1 , que tiene orden de aproximación polinomial 3 y orden de balanceo 2. Los 3 últimos dígitos corresponden a un número de orden.

La tabla está ordenada por orden creciente de balanceo, y para el mismo orden de balanceo está ordenada por orden creciente de aproximación polinomial.

En la estimación del radio espectral conjunto ρ se da una cota inferior del mismo. Para las multiwavelets que tienen un (*) en este ítem, se aplicó el algoritmo 2.3 y se verificó que $\rho < 1$, es decir, se comprobó que son continuas. Aún así, si se observan los gráficos de las multifunciones de escala y de las multiwavelets, es notable la correlación que hay entre (la cota inferior de) ρ y la suavidad de la wavelet. Los casos D1a2b0-001, D1a3b1-691, D1a2b2-299, D1a3b2-699 y D2a3b1-699, que tienen valores de ρ más chicos – exponente de Hölder más grande – corresponden a multifunciones de escala y multiwavelets suaves. En la sección 8.6 se indica de qué manera se estimó el radio espectral conjunto, y cómo se calculó el exponente de Hölder.

El ejemplo D1a1b1-081, que corresponde a una multifunción de escala no continua, se deja en la tabla como curiosidad.

En el listado de propiedades de filtros pasa-bajos o pasa-altos, las igualdades como $H(-1, -1) = 0$ indican que la propiedad se cumple con una precisión de 10^{-8} o mayor, en cambio $G(1, 1) \approx 0$ indica que la propiedad se cumple con una precisión menor (del orden de 10^{-6} o 10^{-7}).

Se puede observar en la tabla que cuanto mayor es el número de matrices-filtro que tiene la multiwavelet, mayor libertad se tiene para exigir condiciones.

Multi-wavelet	$\#H^{(k)}$	apr pol	bal	Filtros pasa bajos/altos	ρ	s
D1a2b0-001	8	2	0		0.7143 (*)	0.9708
D2a3b0-009	8	3	0		0.9138	0.2601
D1a1b1-094	8	1	1		0.9329	0.2004
D1a1b1-081	8	1	1	$F(-1, -1) = 0$	1.0550	-0.1545 **
D1a1b1-070	18	1	1	$F(-1, -1) = 0$ $\nabla F(-1, -1) = 0$	0.9162	0.2525
D1a2b1-092	8	2	1		0.8392 (*)	0.5058
D2a2b1-095	8	2	1		0.8268 (*)	0.5488
D2a2b1-081	8	2	1	$F(-1, -1) = 0$	0.9728	0.0796
D1a3b1-091	8	3	1		0.8305 (*)	0.5359
D2a3b1-061	18	3	1	$F(-1, -1) = 0$ $\nabla F(-1, -1) = 0$ $\nabla I(1, 1) = 0$	0.9883	0.0341
D1a3b1-691	18	3	1	$H(-1, -1) = 0$ $\nabla H(-1, -1) = 0$ $\nabla^2 H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) = 0$ $\nabla G(1, 1) = 0$ $\nabla^2 G(1, 1) = 0$ $\nabla I(1, 1) = 0$	0.7071 (*)	1.0000
D1a3b1-298	10	3	1	$H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) \approx 0$	0.8939	0.3236
D2a3b1-699	18	3	1	$H(-1, -1) = 0$ $\nabla H(-1, -1) = 0$ $\nabla^2 H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) \approx 0$ $\nabla G(1, 1) \approx 0$ $\nabla^2 G(1, 1) \approx 0$ $\nabla I(1, 1) \approx 0$	0.7071	1.0000
D1a2b2-299	14	2	2	$H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) \approx 0$ $\nabla I(1, 1) \approx 0$	0.8260	0.5516
D2a2b2-499	18	2	2	$H(-1, -1) = 0$ $\nabla H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) = 0$ $\nabla G(1, 1) = 0$ $\nabla I(1, 1) = 0$	0.8904	0.3349
D1a3b2-699	18	3	2	$H(-1, -1) \approx 0$ $\nabla H(-1, -1) = 0$ $\nabla^2 H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) \approx 0$ $\nabla G(1, 1) = 0$ $\nabla^2 G(1, 1) \approx 0$ $\nabla I(1, 1) \approx 0$	0.7071(*)	1.0000

Capítulo 7

Construcción de multiwavelets

7.1 Armado del sistema no lineal

Las propiedades deseadas para la multifunción de escala y para la multiwavelet se analizaron en el capítulo 6. Como consecuencia se obtuvieron condiciones sobre los 4 elementos de cada una de las matrices $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$, que son los coeficientes que se quieren obtener (las incógnitas). Con estas condiciones se conforma un sistema de ecuaciones, que resulta ser no lineal. En la tabla 7.1 se hallan las referencias a las condiciones sobre las matrices-filtro.

7.1.1 Configuraciones de índices

8 matrices $H^{(k)}$

Con la distribución de matrices-filtro como en 5.4, y el conjunto de índices Λ como en 5.5, hay 8 matrices $H^{(k)}$ y 8 matrices $G^{(k)}$, con un total de $16 \times 4 = 64$ incógnitas.

Se exploraron diferentes cantidades de matrices-filtro, y varias configuraciones de índices Λ : a continuación se dan algunas de ellas, que corresponden a las multiwavelets más suaves que se obtuvieron. En la tabla 7.2 se lista la cantidad de incógnitas y la cantidad de ecuaciones no lineales según la propiedad deseada de la multiwavelet, y según el conjunto de índices Λ , que corresponde a una cantidad específica de matrices $H^{(k)}$. Según la configuración de índices – y según la cantidad de matrices $H^{(k)}$ –, se tienen más o menos incógnitas y más o menos ecuaciones para las condiciones de ortogonalidad: en la tabla se observan 64, 80, 112 o 144 incógnitas según se trate de 8, 10, 14 o 18 matrices $H^{(k)}$. Nótese que con las condiciones de aproximación polinomial, se agregan más incógnitas al problema: los coeficientes de los vectores v_q . Así, si se quiere una multiwavelet ortogonal con aproximación polinomial de orden 2, como la D1a2b0-001, se tendrán 70 incógnitas y 88 ecuaciones. La cantidad de ecuaciones y de incógnitas que se agregan con la aproximación polinomial, así como la cantidad de ecuaciones que implican el balanceo o las condiciones sobre los filtros, son independientes de la cantidad de matrices $H^{(k)}$.

En la tabla 7.3 se listan los ejemplos de multiwavelets obtenidos, junto con la cantidad de ecuaciones y la cantidad de incógnitas que tenían los sistemas que se resolvieron.

	¶incógnitas	¶ecuaciones
$H^{(k)}, G^{(k)}$	64, 80, 112, 144	–
ortogonalidad	–	76, 108, 172, 204
aprox.pol. 1	2	4
aprox.pol. 2	6	12
aprox.pol. 3	12	24
balanceo 1	–	6
balanceo 2	–	18
$H(-1, -1) = 0$	–	4
$\nabla H(-1, -1) = 0$	–	8
$\nabla^2 H(-1, -1) = 0$	–	16
$G(1, 1) = 0$	–	4
$\nabla G(1, 1) = 0$	–	8
$\nabla^2 G(1, 1) = 0$	–	16
$F(-1, -1) = 0$	–	2
$\nabla F(-1, -1) = 0$	–	4
$\nabla I(1, 1) = 0$	–	4

Tabla 7.2: Dimensiones del sistema. Los tamaños corresponden a 8,10,14 y 18 matrices H^k **18 matrices $H^{(k)}$**

Con esta distribución de índices se tienen 9 matrices (O) con índices en una subgrilla, y 9 matrices (×) con índices en la otra subgrilla. Esta fue la mayor cantidad de matrices-filtro para la cual se hallaron soluciones.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & O & \times & & & \\
 & O & \times & O & \times & & \\
 O & \times & O & \times & O & \times & \\
 & O & \times & O & \times & & \\
 & & O & \times & & &
 \end{array} \quad (7.6)$$

y el conjunto Λ es

$$\begin{aligned}
 \Lambda = \{ & (0, 2), (2, 1), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, -1) \\
 & (1, -1), (0, -1), (-1, -1), (1, -2), (-2, 0), (1, 2), (0, -2), (3, 0) \}.
 \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.2 Solución del sistema**7.2.1 Inconveniencia de las bases de Gröbner para este caso.**

Para hallar los coeficientes de funciones de escala bidimensionales, Faugere utilizó bases de Gröbner. Sellesnick, Lebrun y Vetterli también utilizaron bases de Gröbner para obtener coeficientes de multiwavelets unidimensionales.

Las bases de Gröbner, desarrolladas por Buchberger en los años 60, son una herramienta del álgebra y de la geometría computacional muy útil para resolver sistemas de ecuaciones polinomiales. Intuitivamente, son una generalización de la eliminación Gaussiana para sistemas de polinomios. Tienen la ventaja de que

Multiwavelet	$\#H^{(k)}$	aprox pol.	balan- ceo	Filtros pasa bajos/altos	$\#incog.$	$\#ecuac.$
D1a2b0-001	8	2	0		70	88
D2a3b0-009	8	3	0		78	100
D1a1b1-094	8	1	1		66	86
D1a1b1-081	8	1	1	$F(-1, -1) = 0$	66	88
D1a2b1-092	8	2	1		70	94
D2a2b1-095	8	2	1		70	94
D2a2b1-081	8	2	1	$F(-1, -1) = 0$	70	96
D1a3b1-091	8	3	1		76	106
D1a3b1-691	18	3	1	$H(-1, -1) = 0$ $\nabla H(-1, -1) = 0$ $\nabla^2 H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) = 0$ $\nabla G(1, 1) = 0$ $\nabla^2 G(1, 1) = 0$ $\nabla I(1, 1) = 0$	156	294
D1a3b1-298	10	3	1	$H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) \approx 0$	92	146
D2a3b1-699	18	3	1	$H(-1, -1) = 0$ $\nabla H(-1, -1) = 0$ $\nabla^2 H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) \approx 0$ $\nabla G(1, 1) \approx 0$ $\nabla^2 G(1, 1) \approx 0$ $\nabla I(1, 1) \approx 0$	156	294
D1a2b2-299	14	2	2	$H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) \approx 0$ $\nabla I(1, 1) \approx 0$	118	214
D2a2b2-499	18	2	2	$H(-1, -1) = 0$ $\nabla H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) = 0$ $\nabla G(1, 1) = 0$ $\nabla I(1, 1) = 0$	150	262
D1a3b2-699	18	3	2	$H(-1, -1) \approx 0$ $\nabla H(-1, -1) = 0$ $\nabla^2 H(-1, -1) = 0$ $G(1, 1) \approx 0$ $\nabla G(1, 1) = 0$ $\nabla^2 G(1, 1) \approx 0$ $\nabla I(1, 1) \approx 0$	156	312

Tabla 7.3: Número de ecuaciones y de incógnitas para los ejemplos contruídos.

resuelven un sistema dando todas las soluciones, y no es necesario una estimación inicial para obtenerlas, como sucede en los métodos de optimización numérica.

Sus desventajas son: una muy alta complejidad, un requerimiento muy elevado de memoria y de operaciones, y la falta de robustez del método ante la propagación de errores de redondeo: por eso muchas implementaciones solamente utilizan aritmética entera.

Para resolver un sistema con 24 incógnitas, utilizando bases de Gröbner, con una Sun Ultra 2, a Selesnick le llevó 4 semanas de cómputos. Después tuvo que analizar los resultados, escritos en un archivo ASCII de 18.9 Mbytes. Observando las dimensiones de los problemas a resolver, se comprenderá por qué se descartaron las bases de Gröbner.

Se encaró la resolución del sistema de ecuaciones no lineales usando métodos de optimización numérica: se aplicaron 2 métodos de cuadrados mínimos no lineales, el de Gauss-Newton, y el de Levenberg-Marquardt.

7.2.2 Optimización numérica: preliminares

A continuación daremos una breve introducción a los algoritmos de optimización que se utilizaron. Para más detalle, consultar [61].

Dada $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se busca calcular $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Partiendo de un valor inicial x_0 , los métodos de optimización calculan una sucesión de puntos x_1, x_2, x_3, \dots , que bajo ciertas condiciones convergen a un mínimo local o global. Los algoritmos dan la manera de calcular una iteración ($x_{k+1} = x_+$) a partir del punto anterior o actual ($x_k = x_a$).

El método de Newton

El método de Newton consiste en aproximar $f(x)$ en $x = x_a$ por un modelo cuadrático

$$f(x) \simeq f(x_a) + \nabla f(x_a)^T (x - x_a) + \frac{1}{2} (x - x_a)^T \nabla^2 f(x_a) (x - x_a), \quad (7.8)$$

y resolver $\nabla f(x) = 0$, obteniéndose

$$x_+ = x_a - [\nabla^2 f(x_a)]^{-1} \nabla f(x_a). \quad (7.9)$$

Si $f(x)$ es 2 veces derivable con continuidad, si el Hessiano $\nabla^2 f(x)$ es una matriz definida positiva en un entorno de x^* y si el punto inicial x_0 es suficientemente próximo a x^* , entonces el método de Newton converge en forma cuadrática a la solución.

Cuando el Hessiano no es definido positivo, se lo reemplaza por $\nabla^2 f(x_a) + \mu_a I$, con $\mu_a > 0$. El cálculo del Hessiano es muy costoso en cantidad de operaciones, y existen muchas variantes de este método – los métodos quasi-Newton, que utilizan diferentes estimaciones del Hessiano.

Regiones de confianza

El modelo cuadrático 7.8 es local, y solamente es válido para un entorno de x_a ; tiene sentido entonces restringir la búsqueda de un nuevo punto x_+ a una región donde sea confiable este modelo. En ese caso, se trata de hallar

$$\begin{aligned} \min_{s \in \mathbb{R}^n} \{ f(x_a) + \nabla f(x_a)^T s + \frac{1}{2} s^T H_a s \}, \\ \text{sueto a } \|s\|_2 = \|x - x_a\|_2 \leq \delta_a \end{aligned}$$

donde $H_a \approx \nabla^2 f(x_a)$. El diámetro de la región de confianza se actualiza en cada paso.

7.2.3 Gauss–Newton

Se quiere minimizar una función que es suma de cuadrados

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} R(x)^T R(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i^2(x), \quad m > n, \quad (7.10)$$

donde $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, y $r_i(x)$, la componente i -ésima de $R(x)$, es no lineal en x .

Sea $J(x)$ la matriz Jacobiana de $R(x)$ en el punto x :

$$[J(x)]_{ij} = \frac{\partial r_i(x)}{\partial x_j}.$$

El método de Gauss–Newton resuelve el problema 7.10 utilizando un modelo lineal (afín) para $R(x)$

$$R(x) \approx M_a(x) = R(x_a) + J(x_a)(x - x_a),$$

y luego aplicando el método de Newton al problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|M_a(x)\|^2,$$

con lo cual resulta

$$x_+ = x_a - (J(x_a)^T J(x_a))^{-1} J(x_a)^T R(x_a).$$

En la práctica, en vez de calcular la pseudo inversa $(J(x_a)^T J(x_a))^{-1} J(x_a)^T$, se halla la descomposición QR de la matriz $J(x_a)^T J(x_a)$. Este algoritmo difiere de la aplicación del método de Newton para obtener el mínimo de $f(x)$.

Se puede demostrar que si en cada paso, las columnas de $J(x_a)$ son linealmente independientes, la dirección que elige el método es una dirección de descenso, es decir, se reduce el valor de $f(x)$: $f(x_+) < f(x_a)$.

Si en la solución $R(x^*) = 0$ – se trata de un problema de residuo 0 –, $f(x)$ es 2 veces derivable con continuidad, $J(x)$ está acotado en un entorno de la solución, y x_0 es suficientemente próximo a x^* , entonces el método de Gauss–Newton converge en forma cuadrática a la solución.

7.2.4 Levenberg–Marquardt

Existe una modificación del método de Gauss–Newton, basada en el enfoque de regiones de confianza. Se trata de hallar el valor x_+ que realice el

$$\begin{aligned} \min_{x_+ \in \mathbb{R}^n} & \|R(x_a) + J(x_a)(x_+ - x_a)\|_2, \\ \text{sujeto a } & \|x_+ - x_a\|_2 \leq \partial_a \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene

$$x_+ = x_a - (J(x_a)^T J(x_a) + \mu_a I)^{-1} J(x_a)^T R(x_a),$$

donde $\mu_a = 0$ si $\|(J(x_a)^T J(x_a) + \mu_a I)^{-1} J(x_a)^T R(x_a)\| \leq \partial_a$, y $\mu_a > 0$ en los demás casos.

7.2.5 Implementación

El sistema no lineal se resolvió minimizando la suma de los cuadrados de cada una de las ecuaciones no lineales, y controlando que en el mínimo alcanzado esta suma fuera cero. Se aplicó una estrategia mixta: se comenzó utilizando el método de Levenberg–Marquardt; si los cálculos evidenciaban un residuo muy grande, entonces se cambió y se aplicó Gauss–Newton.

En un principio solamente se incluyeron en el sistema las condiciones sobre las matrices-filtro de las funciones de escala, dejando fuera del sistema las condiciones que tenían que ver con las wavelets. Resolviendo este sistema se obtuvieron soluciones que permitieron construir ejemplos de funciones de escala. Pero no siempre se encontraron soluciones para un segundo sistema con las condiciones sobre las matrices-filtro de las wavelets: no porque no existieran – en [62] se prueba que dada una multifunción de escala, que define un análisis de multirresolución de multiplicidad r en \mathbb{R}^n , para una matriz de dilatación D , siempre existe una multiwavelet asociada si $2r(|D| - 1) \geq n$, lo cual en nuestro caso se cumple siempre – sino porque el método de optimización requiere una estimación inicial para converger a la solución, y no se tenía una estimación adecuada. Finalmente se integraron las condiciones sobre $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$ en un único sistema a resolver.

Se hizo un programa que genera automáticamente las condiciones de ortogonalidad, aproximación polinomial, balanceo y demás condiciones, para cualquier conjunto de índices elegido, que conforman el sistema no lineal a resolver. Los datos del programa son: la configuración de índices, la matriz de dilatación, el orden de aproximación polinomial deseado, el orden deseado de balanceo, y demás condiciones que se quieren imponer. El programa resuelve el sistema en forma iterativa a partir de un punto inicial en el espacio de incógnitas. Si no encuentra una solución, el programa genera otro punto inicial. En la salida, el programa arroja como resultado los 4 elementos de cada matriz-filtro $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$, además de los vectores v_k de la aproximación polinomial. Si se encuentra una solución al problema, se controlan 3 cosas: (i) que en la solución se verifiquen todas las condiciones, es decir, que en el mínimo encontrado la función a minimizar valga 0, (ii) que el vector v_{00} sea no nulo, y (iii) que la estimación del radio espectral conjunto sea menor que 1 – ver más adelante en 8.6.1. Si alguna de las 3 condiciones no se cumple, se descarta la solución, se cambia el punto inicial, y se vuelve a buscar.

La mayor parte de este trabajo se ejecutó en una UltraSparc 1, de plataforma Unix, con un procesador de 140Mhz y 64Mb de memoria. Los ejemplos de multifunciones de escala y de multiwavelets hallados figuran en la tabla 6.7. A continuación se indica el algoritmo que se utilizó para graficar las funciones halladas.

7.3 Gráficos: algoritmo cascada

7.3.1 Gráficos de las multifunciones de escala

No se conoce la forma analítica de las funciones de escala Φ_1 y Φ_2 , ni la de las wavelets Ψ_1 y Ψ_2 . Sin embargo, conociendo tan solo las matrices-filtro $H^{(k)}$ se pueden obtener una sucesión de pares de funciones $(\Phi_1^{(j)}, \Phi_2^{(j)})_j$ cuyos respectivos gráficos convergen a los gráficos de Φ_1 y de Φ_2 cuando $j \rightarrow \infty$. En cada iteración se obtiene una aproximación de mayor resolución que la anterior.

Para iniciar el algoritmo se comienza con 2 funciones $\Phi_1^{(0)}(x)$ y $\Phi_2^{(0)}(x)$, que son –salvo una constante – la función característica de un cuadrado.

Sea Q el cuadrado unitario $Q = [0, 1) \times [0, 1)$ y sea $\chi(x_1, x_2)$ su función característica. Para $x \in \mathbb{R}^2$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{si } x \notin Q \end{cases}$$

Se define

$$\Phi^{(0)}(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(0)}(x) \\ \Phi_2^{(0)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \chi(x) \\ a_2 \chi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \chi(x)$$

donde $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ verifica $w^T a = 1$.

En cada iteración se calcula una estimación más fina aplicando la ecuación de dilatación:

$$\Phi^{(j+1)}(x) = \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} H^{(k)} \Phi^{(j)}(Dx - k)$$

Escribiendo cada iteración $\Phi^{(j)}(x)$ en términos de contracciones sucesivas de $\chi(x)$ – mediante D – y sus traslaciones enteras, obtenemos

$$\Phi^{(1)}(x) = \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} H^{(k)} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \chi(Dx - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} V_{\cdot, k}^{(1)} \chi(Dx - k)$$

$$\Phi^{(2)}(x) = \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} H^{(k)} \sum_{r \in \mathbb{Z}^2} V_{\cdot, r}^{(1)} \chi(D^2x - (Dk + r)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} V_{\cdot, n}^{(2)} \chi(D^2x - n)$$

donde

$$V_{\cdot, 00}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad V_{\cdot, n}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{para } n \neq (0, 0). \quad (7.11)$$

$$V_{\cdot, n}^{(1)} = \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} H^{(k)} V_{\cdot, n}^{(0)} \quad V_{\cdot, n}^{(2)} = \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} H^{(k)} V_{\cdot, n - Dk}^{(1)}$$

Y, en general,

$$\begin{aligned} \Phi^{(j)}(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} V_{\cdot, n}^{(j)} \chi(D^j x - n) \\ \text{i.e.} \quad \begin{bmatrix} \Phi_1^{(j)}(x) \\ \Phi_2^{(j)}(x) \end{bmatrix} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \begin{bmatrix} V_{1, n}^{(j)} \\ V_{2, n}^{(j)} \end{bmatrix} \chi(D^j x - n) \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde

$$V_{\cdot, n}^{(j+1)} = \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} H^{(k)} V_{\cdot, n - D^j k}^{(j)} \quad (7.13)$$

Reescribiendo (7.12), se tiene

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(j)}(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} V_{1, n}^{(j)} \chi(D^j x - n) \\ \Phi_2^{(j)}(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} V_{2, n}^{(j)} \chi(D^j x - n). \end{aligned}$$

Iteración	Tamaño	1 matriz	2 matrices	bytes
2	7 x 6	42	84	672
4	19 x 16	304	608	4864
6	38 x 32	1216	2432	19456
8	76 x 64	4864	9728	77824
10	152 x 128	19456	38912	311296
12	304 x 256	77824	155648	1245184
14	608 x 512	311296	622592	4980736
16	1216 x 1024	1245184	2490368	19922944
18	2432 x 2048	4980736	9961472	79691776
20	4864 x 4096	19922944	39845888	318767104

Tabla 7.4: Requerimientos de memoria para graficar Φ_1 y Φ_2 .**Algoritmo 7.1.** Generación de gráficos de Φ_1 y Φ_2 :

- Asignar los valores iniciales de las matrices $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$ según 7.11.
- Aplicar (7.13) para $j = 1, \dots, J$.
- Graficar $V_{1,n}^{(j)}$ y $V_{2,n}^{(j)}$.

En cada iteración j , se calculan 2 matrices $V_{1,n}^{(j)}$ y $V_{2,n}^{(j)}$ (variando $n \in \mathbb{Z}^2$), que son los coeficientes de $\Phi_1^{(j)}$ y $\Phi_2^{(j)}$ en una grilla cuadrada sucesivamente refinada y reflejada, en el caso de D_1 , o rotada, en el caso de D_2 . Para que la orientación de las bases $\chi(D^j x - n)$ sea igual a la del plano, en el caso de D_1 se observan las iteraciones pares, y en el caso de D_2 , solamente las iteraciones que son múltiplo de 4.

El requerimiento de memoria es un factor limitante: en la tabla 7.4 se puede observar el crecimiento exponencial del tamaño de las matrices $V_{1,n}^{(j)}$ y $V_{2,n}^{(j)}$ en el caso de 8 matrices-filtro $H^{(k)}$. Los valores de las matrices $V_{1,n}^{(j)}$ y $V_{2,n}^{(j)}$ son números reales de doble precisión y ocupan 8 bytes. Para graficar la vigésima iteración se necesitarían 308 Mb de memoria. Sin embargo, en general alcanza con 8 iteraciones para tener una buena representación de ambas funciones. En las figuras 7.1 a 7.4 se graficaron las iteraciones pares del algoritmo para una multifunción de escala Φ asociada a D_1 de aproximación polinomial 2.

7.3.2 Gráficos de las multiwavelets

Para graficar las wavelets Ψ_1 y Ψ_2 , es necesario conocer las matrices-filtro $H^{(k)}$ y $G^{(k)}$. Primero se obtiene una buena aproximación $\Phi_1^{(J-1)}$ y $\Phi_2^{(J-1)}$ de Φ_1 y Φ_2 , tal como se ha indicado y luego se aplica la ecuación de la wavelet (5.6) una sola vez.

$$\Psi^{(J)}(x) = \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} G^{(k)} \Phi^{(J-1)}(D x - k)$$

de lo cual resultan

$$V_n^{(J)} = \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} G_k V_{n-D^{J-1}k}^{(J-1)} \quad (7.14)$$

$$\Psi_1^{(J)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} V_{1,n}^{(J)} \chi(D^J x - n)$$

$$\Psi_2^{(J)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} V_{2,n}^{(J)} \chi(D^J x - n).$$

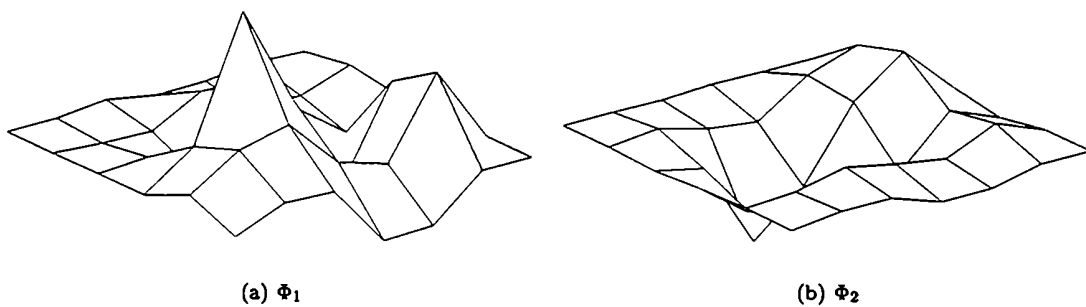


Figura 7.1: Φ : 2 iteraciones del algoritmo para D1a2b0-001.

Algoritmo 7.2. Generación de gráficos de Ψ_1 y Ψ_2

- i) Asignar los valores iniciales de las matrices $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$ según (7.11).
- ii) Aplicar (7.13) para $j = 1, \dots, J - 1$.
- iii) Aplicar (7.14).
- iv) Graficar $V_{1,n}^{(J)}$ y $V_{2,n}^{(J)}$.

En la figura 7.5 se observan los gráficos de las wavelets Ψ_1 y Ψ_2 para el mismo caso.

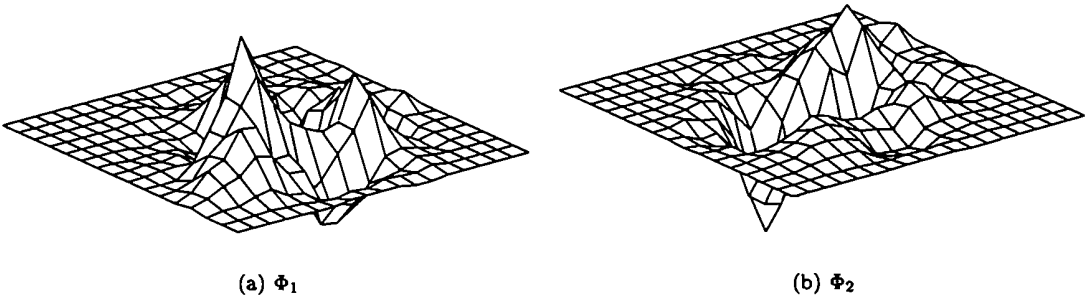


Figura 7.2: Φ : 4 iteraciones del algoritmo para D1a2b0-001.

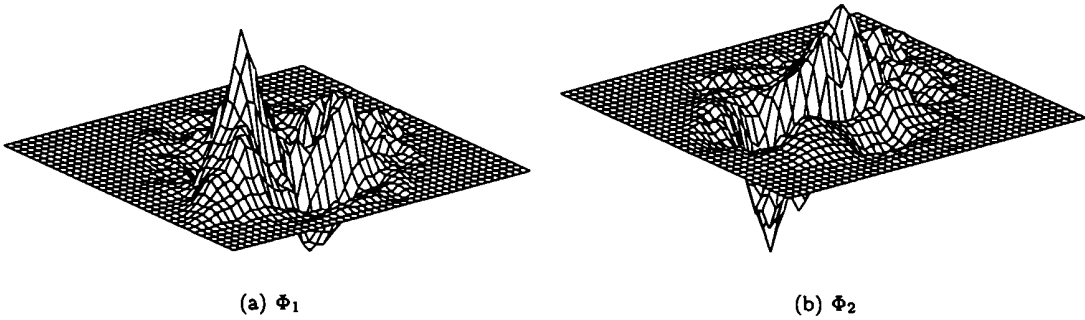


Figura 7.3: Φ : 6 iteraciones del algoritmo para D1a2b0-001.

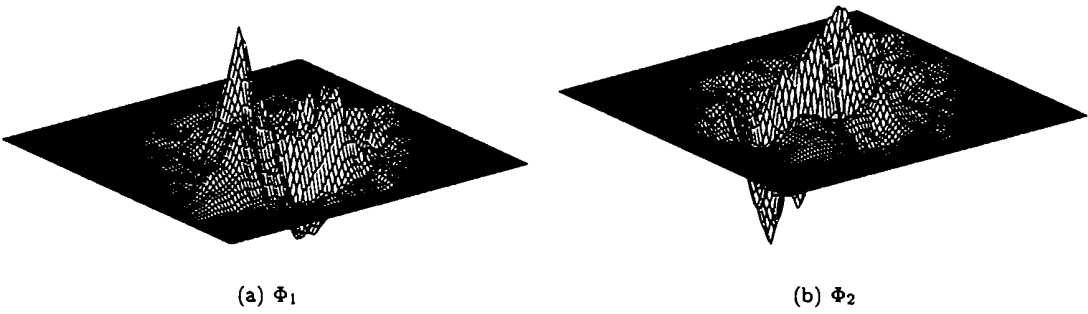


Figura 7.4: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a2b0-001.

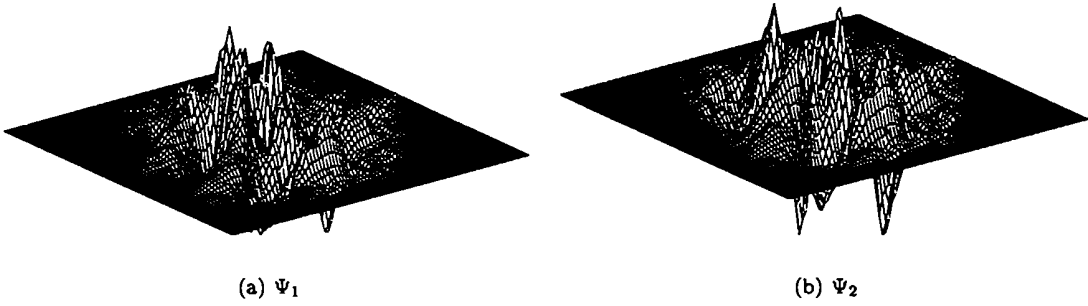


Figura 7.5: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a2b0-001.

Capítulo 8

Continuidad de las multiwavelets no separables

En este capítulo se darán herramientas para analizar la continuidad de las funciones de escala y las multiwavelets construídas. Se siguen los lineamientos del artículo de Heil y Colella [9] sobre wavelets en una dimensión. Primero, se verá que la continuidad de las funciones de escala Φ_1 y Φ_2 es equivalente a la continuidad de un vector funcional v , que aparece cuando se escribe la ecuación de dilatación en forma matricial. Un conjunto de coeficientes $\{H^{(k)}, k \in \Lambda\}$ y una matriz de dilatación D determinan un vector funcional v y dos matrices T_0 y T_1 . Para que $v(x)$ sea continua, es condición suficiente que el radio espectral conjunto de T_0 y T_1 restringidas a un cierto subespacio E sea inferior a 1. Esto está demostrado para cualquier número de multifunciones de escala, y de cualquier dimensión, en [55], donde Cabrelli, Heil y Molter utilizan herramientas del análisis funcional, apoyándose en la autosimilaridad de las funciones de escala. También demuestran la convergencia del algoritmo cascada para graficar las multifunciones de escala y las multiwavelets. El enfoque que se da aquí está restringido al caso que nos concierne – 2 funciones de escala, definidas sobre \mathbb{R}^2 –, y es más aplicado. En particular, se indica como obtener el subespacio E , en el caso de tener las matrices T_0 y T_1 más de un autovalor de módulo 1. Esta situación no se presenta en el caso de las wavelets en una dimensión.

8.1 El conjunto U

En lo que sigue D es una de las dos matrices de dilatación D_1 o D_2 definidas en el capítulo 3, y $L = \{e_0, e_1\} = \{(0, 0), (0, 1)\}$ es un conjunto de representantes del grupo $\mathbb{Z}^2/D\mathbb{Z}^2$ para cualquiera de las dos matrices.

Sea f la función

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (8.1)$$

$$f(x) = f(Dx - e_0) + f(Dx - e_1). \quad (8.2)$$

Se puede ver que existe un conjunto compacto $U = U(D, L)$ en \mathbb{R}^2 – ver [28], del cual f es la función característica, que satisface

$$U = \{D^{-1}(U + e_0)\} \cup \{D^{-1}(U + e_1)\} = D^{-1}(U + L). \quad (8.3)$$

En el caso $D = D_1$ el conjunto U resulta ser un paralelogramo – ver figura (8.1), y en el caso $D = D_2$ el conjunto U tiene la forma de un dragón o twin dragon – ver figura (8.2). En ambos casos, el subconjunto negro es $D^{-1}U$, y el subconjunto gris es $D^{-1}(U + e_1)$.

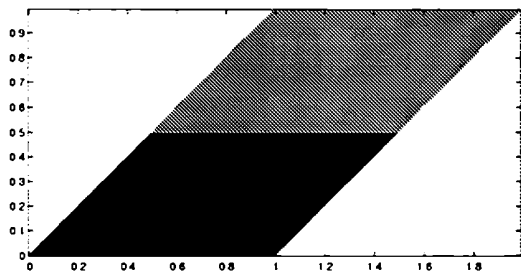


Figura 8.1: El conjunto U en el caso $D = D_1$.

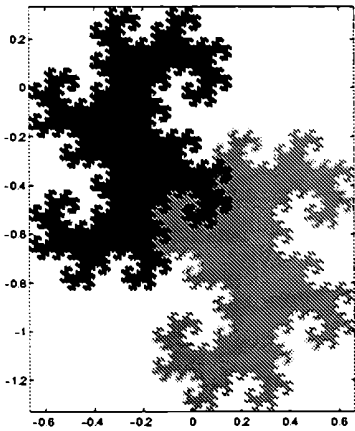


Figura 8.2: El conjunto U en el caso $D = D_2$.

8.2 Desarrollo D -ádico para los puntos de U

Teorema 8.1.

$$U = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} D^{-j} e_{d_j}, \text{ donde } d_j \in \{0, 1\} \right\}$$

Demostración. Supongamos que $x \in U$, entonces en virtud de 8.3 o bien $x \in D^{-1}U = D^{-1}(U + e_0)$, o bien $x \in D^{-1}(U + e_1)$, - también puede suceder que x pertenezca a ambos conjuntos. En el primer caso, existe $u_1 \in U$ tal que $Dx = u_1 + e_0$, y $x = D^{-1}e_0 + D^{-1}u_1$, con lo cual $d_1 = 0$. En el segundo caso, existe $u_1 \in U$ tal que $Dx = u_1 + e_1$, y $x = D^{-1}e_1 + D^{-1}u_1$, y entonces $d_1 = 1$. En ambos casos, existe $u_1 \in U$ tal que $x = D^{-1}e_{d_1} + D^{-1}u_1$. Si x pertenece a la frontera de los 2 conjuntos, es decir, $x \in D^{-1}U \cap D^{-1}(U + e_1)$ entonces obtendremos 2 desarrollos diferentes para x . Para evitar esto, se puede descomponer U en 2 conjuntos disjuntos -ver [55],

$$U = U_1 \cup U_2,$$

donde

$$\begin{aligned} U_1 &= D^{-1}U \\ U_2 &= \{D^{-1}(U + e_1)\} - \{D^{-1}U\}. \end{aligned}$$

Es decir, si $x \in D^{-1}U \cap D^{-1}(U + e_1)$, entonces $x \in U_1$ y $d_1 = 0$. Para calcular e_{d_2} se repite el procedimiento sobre u_1 , se obtiene $u_1 = D^{-1}e_{d_2} + D^{-1}u_2$ y luego $x = D^{-1}e_{d_1} + D^{-2}e_{d_2} + D^{-2}u_2$. Y así sucesivamente.

Convergencia: la serie converge absolutamente, ya que

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} D^{-j} e_{d_j} \right\|_2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|D^{-j} e_{d_j}\|_2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|D^{-j}\|_2 \|e_{d_j}\|_2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|D^{-1}\|_2^j < \infty$$

pues $\|D^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min \sigma_i} < 1$. □

Nota 8.1. Si $x \in U$,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} D^{-j} e_{d_j} \tag{8.4}$$

Llamaremos a 8.4 “desarrollo D -ádico de x ”, y lo notaremos

$$x = (d_1 d_2 \dots)_D$$

En el caso $D = D_2$ la fórmula 8.4 es llamada “expansión dragónica” en [28].

Ejemplo 8.1. Ejemplo de un punto con desarrollo D -ádico finito, para el caso $D = D_1$.

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ Dx &= \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} = e_1 + u_1 \\ x &= D^{-1}e_1 + D^{-1}u_1 \end{aligned}$$

$$Du_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = e_0 + u_2$$

$$u_1 = D^{-1}e_0 + D^{-1}u_2$$

$$x = D^{-1}e_1 + D^{-2}e_0 + D^{-2}u_2$$

$$Du_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = e_0 + u_3$$

$$u_2 = D^{-1}e_0 + D^{-1}u_3$$

$$x = D^{-1}e_1 + D^{-2}e_0 + D^{-3}e_0 + D^{-4}u_3$$

$$Du_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1 \quad (8.5)$$

$$u_3 = D^{-1}e_1$$

$$\begin{aligned} x &= D^{-1}e_1 + D^{-2}e_0 + D^{-3}e_0 + D^{-4}e_1 \\ &= D^{-1}e_{d_1} + D^{-2}e_{d_2} + D^{-3}e_{d_3} + D^{-4}e_{d_4} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= D^{-1}e_1 + D^{-4}e_1 \quad (8.6) \\ x &= (0.1001)_D \quad (8.7) \end{aligned}$$

Por otro lado, en 8.5, se podría haber puesto

$$Du_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_0 + u_4$$

$$u_3 = D^{-1}e_0 + D^{-1}u_4$$

$$x = D^{-1}e_1 + D^{-2}e_0 + D^{-3}e_0 + D^{-4}e_0 + D^{-4}u_4$$

$$Du_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_0 + u_5$$

$$u_4 = D^{-1}e_0 + D^{-1}u_5$$

$$x = D^{-1}e_1 + D^{-2}e_0 + D^{-3}e_0 + D^{-4}e_0 + D^{-5}e_0 + D^{-5}u_5$$

$$Du_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1 + u_6$$

$$u_5 = D^{-1}e_1 + D^{-1}u_6$$

$$x = D^{-1}e_1 + D^{-2}e_0 + D^{-3}e_0 + D^{-4}e_0 + D^{-5}e_0 + D^{-6}e_1 + D^{-6}u_6$$

$$x = (0.100001..)D$$

y como $u_6 = u_4$

$$u_4 = D^{-1}e_0 + D^{-1}u_5$$

$$= D^{-1}e_0 + D^{-2}e_1 + D^{-2}u_6$$

$$u_6 = D^{-1}e_0 + D^{-2}e_1 + D^{-2}u_6$$

$$x = D^{-1}e_1 + D^{-2}e_0 + D^{-3}e_0 + D^{-4}e_0 + D^{-5}e_0$$

$$+ D^{-6}e_1 + D^{-7}e_0 + D^{-8}e_1 + D^{-8}u_6 \quad (8.8)$$

$$x = D^{-1}e_1 + D^{-6} \sum_{j=0}^{\infty} D^{-2j}e_1 \quad (8.9)$$

$$x = (0.1000010101..)D$$

$$x = (0.1000\widehat{01})D$$

Ahora veremos que el desarrollo finito 8.6 y el desarrollo infinito periódico 8.9 de x coinciden:

$$x = D^{-1}e_1 + D^{-6} \sum_{j=0}^{\infty} D^{-2j}e_1$$

$$= D^{-1}e_1 + D^{-6} \lim_{n \rightarrow \infty} (I - D^{-2})^{-1} e_1$$

$$= D^{-1}e_1 + D^{-6} (2I) e_1$$

$$= D^{-1}e_1 + D^{-4}e_1.$$

Para los pasos anteriores se usaron las propiedades:

$$D^{-2} = 0.5I,$$

$$\|D^{-2}\| = 0.5 < 1,$$

$$\|A\| < 1 \implies I - A \text{ tiene inversa y } \sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I - A)^{-1},$$

$$2I = D^2.$$

8.3 Teselado del plano con U y sus traslaciones

El conjunto U , con sus traslaciones en Z^2 , forma un cubrimiento del plano [63]. Llamaremos “baldosa” del cubrimiento a cada conjunto $U + k$, $k \in Z^2$. Si, además, para cada par (k, k') , $k \neq k'$, los conjuntos

$U + k$ y $U + k'$ se intersecan en un conjunto de medida nula, es decir

$$\mu(\{U + k\} \cap \{U + k'\}) = 0 \quad (8.10)$$

entonces se tiene un teselado del plano. El conjunto U , con sus traslaciones en Z^2 , forma un teselado del plano si y solo si $\mu(U) = 1$ [64]. Los dos conjuntos U inducidos a partir del conjunto L dado y de cualquiera de las 2 matrices D_1 o D_2 consideradas en este trabajo tienen esta propiedad.

Sea \mathfrak{F} un cubrimiento de $\text{sup}(\Phi_1)$ y $\text{sup}(\Phi_2)$ por traslaciones enteras de U :

$$\text{sup}(\Phi_j) \subset \bigcup_{r \in \Gamma \subset Z^2} (U + r) = \mathfrak{F}, \quad j = 1, 2 \quad (8.11)$$

Al conjunto U se le puede suprimir parte de su frontera de manera que la intersección de 2 baldosas sea disjunta. Como el conjunto U tiene 6 vecinos en el teselado del plano, tanto en el caso del paralelogramo como el del dragón, se pueden suprimir las fronteras comunes a 3 vecinos. De manera que se suprime $u + r$ ($r \in Z^2$), si u y $u + r$ ambos pertenecen a U . Es decir, tomamos

$$\tilde{U} = U - \bigcup_{r \in A \subset Z^2} (U + r) \quad (8.12)$$

donde

$$A = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1)\} \text{ en el caso } D = D_1$$

y

$$A = \{(1, 0), (0, 1), (1, -1)\} \text{ en el caso } D = D_2$$

– ver [55], observar que en ambos casos $e_1 \in A$ – Entonces

$$\{\tilde{U} + k\} \cap \{\tilde{U} + k'\} = \emptyset, \quad \text{para } k \neq k', \quad (8.13)$$

y además

$$\tilde{U} \cap Z^2 = \{(0, 0)\}. \quad (8.14)$$

El conjunto \tilde{U} , con sus traslaciones enteras, también forma un teselado del plano. Y como \tilde{U} solo difiere de U en la exclusión de algunos bordes, no es cerrado, y entonces

$$\text{sup}(\Phi_j) \subset \overline{\bigcup_{r \in \Gamma \subset Z^2} (\tilde{U} + r)} = \mathfrak{F}, \quad j = 1, 2. \quad (8.15)$$

La ecuación (8.11) implica que si x pertenece al soporte de Φ_1 o de Φ_2 , existe un $u \in U$ y un $r \in \Gamma$ tal que $x = u + r$. El conjunto Γ es el conjunto de enteros por el cual se traslada la baldosa para obtener un cubrimiento de los soportes de las Φ_j , y no tiene nada que ver con las subgrillas Γ_0 y Γ_1 . Queremos analizar ahora las relaciones entre Γ y Λ , el conjunto de índices de las matrices-filtro $H^{(k)}$.

Supongamos que Φ_1 y Φ_2 son funciones continuas y que $x \in \mathbb{R}^2$ es tal que $\Phi_1(x) \neq 0$ o $\Phi_2(x) \neq 0$ Entonces

$$x \in \bigcup_{r \in \Gamma \subset Z^2} (U + r). \quad (8.16)$$

De la ecuación de dilatación

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \Lambda \subset Z^2} H^{(k)} \Phi(Dx - k)$$

se deduce que existe algún $k \in \Lambda$ y algún $j \in \{1, 2\}$ tal que $\Phi_j(Dx - k) \neq 0$. Luego $Dx - k$ pertenece a $\text{sop}(\Phi_j)$ y por (8.11) existen $u \in U, r \in \Gamma$ tal que

$$Dx - k = u + r.$$

Para que esta escritura sea única, tomamos el convenio de que $u \in \tilde{U}$.

$$x = D^{-1}(u + r + k) = D^{-1}u + D^{-1}(r + k).$$

El elemento $u \in U$, y por 8.3 se deduce que $D^{-1}u \in U$ y $D^{-1}(u + e_1) \in U$.

Existen ahora diferentes posibilidades, según a qué subgrilla Γ_0 o Γ_1 pertenece el término $r + k$. Recordar que queremos establecer condiciones sobre Γ :

(i) Si $r + k \in \Gamma_0 = DZ^2$, entonces $D^{-1}(r + k) \in Z^2$. Como además $D^{-1}u \in U$, entonces por (8.16) debe ser $D^{-1}(r + k) \in \Gamma$. Luego Γ debe contener todos los elementos $D^{-1}(r + k)$ con $r \in \Gamma, k \in \Lambda$ y $r + k \in \Gamma_0 = DZ^2$. Se infiere entonces, que

$$D^{-1}(\{\Gamma + \Lambda\} \cap DZ^2) = D^{-1}(\Gamma + \Lambda) \cap Z^2 \subset \Gamma. \quad (8.17)$$

Esta es la condición de admisibilidad para el conjunto Γ asociado al conjunto de índices Λ , dada en [55].

(ii) Si $r + k \in \Gamma_1 = DZ^2 + e_1$, entonces existe $j \in Z^2$ tal que $r + k = D j + e_1$. Reemplazando se obtiene

$$x = D^{-1}u + D^{-1}(r + k) = D^{-1}u + j + D^{-1}e_1 = D^{-1}(u + e_1) + j.$$

Como por hipótesis $D^{-1}(u + e_1) \in U$, entonces $j = D^{-1}(r + k - e_1) \in \Gamma$. Luego Γ debe contener todos los elementos $D^{-1}(r + k - e_1)$ con $r \in \Gamma, k \in \Lambda$ y $r + k \in \Gamma_1$. Es decir

$$D^{-1}(\{\Gamma + \Lambda - e_1\} \cap DZ^2) = D^{-1}(\Gamma + \Lambda - e_1) \cap Z^2 \subset \Gamma. \quad (8.18)$$

Llamando

$$L = \{(0, 0), (1, 0)\} = \{e_0, e_1\}, \quad (8.19)$$

de (8.17) y (8.18) se deduce que

$$D^{-1}(\Gamma + \Lambda - L) \cap Z^2 \subset \Gamma. \quad (8.20)$$

Definimos entonces al conjunto Γ como el conjunto minimal que cumple (8.20).

Para ejemplificar lo anterior con una función de escala unidimensional, se tiene que para la función de escala Daubechies 4 el soporte es $[0, 3]$, $\Lambda = \{0, 1, 2, 3\}$, $L = \{0, 1\}$, $U = [0, 1]$, $\tilde{U} = [0, 1)$, $D = 2$, $\Gamma = \{0, 1, 2\}$, y $D^{-1}(\Gamma + \Lambda - L) \cap Z \subset \Gamma$.

Lema 8.1. *El conjunto de todos los pares de enteros contenidos en \mathfrak{S} es exactamente Γ .*

$$\Gamma = \mathfrak{S} \cap Z^2$$

Demostración. Esto se deduce de que la intersección de los conjuntos del cubrimientos es disjunta – fórmula (8.13) – y de las fórmulas (8.15) y (8.14). \square

8.4 El vector funcional v

Introducimos un orden en Γ ,

$$\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q\}$$

donde $\gamma_0 = (0, 0)$.

Para $x \in U$ definimos el vector v de $2q + 2$ elementos:

$$v(x) = \begin{bmatrix} v_0(x) \\ v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \\ \vdots \\ v_{2q}(x) \\ v_{2q+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_1(x + \gamma_1) \\ \Phi_2(x + \gamma_1) \\ \vdots \\ \Phi_1(x + \gamma_q) \\ \Phi_2(x + \gamma_q) \end{bmatrix}$$

Para cada $\gamma_k \in \Gamma$, tenemos que

$$\begin{aligned} v_{2k}(x) &= \Phi_1(x + \gamma_k) \\ v_{2k+1}(x) &= \Phi_2(x + \gamma_k). \end{aligned}$$

Queremos ver que las coordenadas de $v(x)$, formadas por las funciones $\Phi_1(x)$ y $\Phi_2(x)$ sobre las baldosas $U + k$ del teselado, se “peguen” bien en los bordes. Indicaremos ∂U a la frontera de U .

Lema 8.2. Sea $u_0 \in \partial U \subset U$, y sea r uno de los 3 elementos de A , de manera tal que el elemento $u_0 + r$ también pertenezca a U . El elemento $u_0 + r$ pertenece además al borde de una baldosa contigua a U . Es decir, $u_0 + r \in U \cap U + r$. Sea $\gamma_k \in \Gamma$. Si $r + \gamma_k = \gamma_{k'}$ $\in \Gamma$, entonces

$$\begin{aligned} v_{2k}(u_0 + r) &= v_{2k'}(u_0) \\ v_{2k+1}(u_0 + r) &= v_{2k'+1}(u_0). \end{aligned}$$

Demostración. Notemos que el elemento u_0 pertenece al borde de U , y $u_0 + r \in U$, para $r \in A$: esto indica que $u_0 \in \tilde{U}$. Además,

$$\begin{aligned} v_{2k}(u_0 + r) &= \Phi_1(u_0 + r + \gamma_k) = \Phi_1(u_0 + \gamma_{k'}) = v_{2k'}(u_0) \\ v_{2k+1}(u_0 + r) &= \Phi_2(u_0 + r + \gamma_k) = \Phi_2(u_0 + \gamma_{k'}) = v_{2k'+1}(u_0) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 8.2. Para el caso

$$\Gamma = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (0, 1), (1, 1), (2, 1), \dots\} = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}\}$$

$D = D_1$ y $A = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1)\} = \{r_1, r_2, r_3\}$:

1. $r = r_1 = (1, 0)$. Se tiene que $r_1 + \gamma_0 = \gamma_1$; $r_1 + \gamma_1 = \gamma_2$; $r_1 + \gamma_k = \gamma_{k+1}$; $r_1 + \gamma_{k+1} = \gamma_{k+2}$. El elemento u_0 pertenece a $\tilde{U} \cap \partial U$, y $u_0 + r_1 \in U$ solo si

$$u_0 \in Y_1 = \{(x_1, x_2), \text{ con } 0 \leq x_1, x_2 < 1 \text{ y } x_1 = x_2\}$$

Entonces, para $u_0 \in Y_1$ se deduce del lema anterior que:

$$\begin{aligned} v_0(u_0 + r_1) &= v_2(u_0) & v_2(u_0 + r_1) &= v_4(u_0) \\ v_1(u_0 + r_1) &= v_3(u_0) & v_3(u_0 + r_1) &= v_5(u_0) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2k}(u_0 + r_1) &= v_{2k+2}(u_0) & v_{2k+2}(u_0 + r_1) &= v_{2k+4}(u_0) \\ v_{2k+1}(u_0 + r_1) &= v_{2k+3}(u_0) & v_{2k+3}(u_0 + r_1) &= v_{2k+5}(u_0) \end{aligned}$$

2. $r = r_2 = (1, 1)$. Se tiene $r_2 + \gamma_0 = \gamma_{k+1}$ y $r_2 + \gamma_1 = \gamma_{k+2}$. El elemento u_0 pertenece a $\tilde{U} \cap \partial U$, y $u_0 + r_2 \in U$ solo si

$$u_0 \in Y_2 = \{(x_1, 0), \text{ con } 0 \leq x_1 < 1\}$$

Entonces, para $u_0 \in Y_2$ se deduce del lema anterior que:

$$\begin{aligned} v_0(u_0 + r_2) &= v_{2k+2}(u_0) & v_2(u_0 + r_2) &= v_{2k+4}(u_0) \\ v_1(u_0 + r_2) &= v_{2k+3}(u_0) & v_3(u_0 + r_2) &= v_{2k+5}(u_0) \end{aligned}$$

3. $r = r_3 = (2, 1)$. Se tiene $r_3 + \gamma_0 = \gamma_{k+2}$. El elemento u_0 pertenece a $\tilde{U} \cap \partial U$, y $u_0 + r_3 \in U$ solo si

$$u_0 = (0, 0)$$

Entonces, para $u_0 = (0, 0)$ se deduce del lema anterior que:

$$\begin{aligned} v_0(u_0 + r_3) &= v_{2k+4}(u_0) \\ v_1(u_0 + r_3) &= v_{2k+5}(u_0). \end{aligned}$$

Nota 8.2. Sean Φ_1 y Φ_2 son continuas. Si $x + \gamma_k \in \partial \text{supp } \Phi_1$, entonces

$$v_{2k}(x) = \Phi_1(x + \gamma_k) = 0,$$

y si $x + \gamma_k \in \partial \text{supp } \Phi_2$, entonces

$$v_{2k+1}(x) = \Phi_2(x + \gamma_k) = 0.$$

8.5 Las matrices T_0 y T_1

Si ahora $x \in D^{-1}U$ y se aplica la ecuación de dilatación 8.3, se observa que los valores de $\begin{bmatrix} \Phi_1(x + \gamma_i) \\ \Phi_2(x + \gamma_i) \end{bmatrix}$ están determinados por sumas de bloques de 2×1 , resultados de productos

$$H^{(k)} \begin{bmatrix} \Phi_1(Dx + D\gamma_i - k) \\ \Phi_2(Dx + D\gamma_i - k) \end{bmatrix},$$

con $k \in \Lambda$. Si para un valor de k el vector columna es no nulo, $Dx + D\gamma_i - k$ debe pertenecer a algún cubrimiento de los soportes de Φ_1 y de Φ_2 . Como $x \in D^{-1}U$, resulta que $Dx \in U$. Entonces $D\gamma_i - k = \gamma_j \in \Gamma$. Por lo tanto los valores de $\begin{bmatrix} \Phi_1(x + \gamma_i) \\ \Phi_2(x + \gamma_i) \end{bmatrix}$ están determinados por sumas de productos $H^{(k)} \begin{bmatrix} \Phi_1(Dx + \gamma_j) \\ \Phi_2(Dx + \gamma_j) \end{bmatrix}$, con $k = D\gamma_i - \gamma_j$.

En vista de lo anterior, se puede afirmar que existe una matriz T_0 de tamaño $2(q+1) \times 2(q+1)$ tal que

$$v(x) = T_0 v(Dx), \quad \text{si } x \in D^{-1}U. \quad (8.21)$$

La matriz T_0 está formada por bloques de 2×2 . Si numeramos los bloques a partir de $(0, 0)$, el bloque (i, j) de T_0 está dado por

$$[T_0]_{i,j} = H^{(D\gamma_i - \gamma_j)},$$

donde el orden de los bloques es el inducido por el orden de Γ .

Ejemplo 8.3. Si $\Gamma = \{(0,0), (1,0), (2,0), \dots, (0,1), (1,1), (2,1), \dots\}$ y $D = D_1$,

$$T_0 = \begin{bmatrix} H^{(0,0)} & H^{(-1,0)} & H^{(-2,0)} & \dots & H^{(0,-1)} & H^{(-1,-1)} & H^{(-2,-1)} & \dots \\ H^{(1,1)} & H^{(0,1)} & H^{(-1,1)} & \dots & H^{(1,0)} & H^{(0,0)} & H^{(-1,0)} & \dots \\ H^{(2,2)} & H^{(1,2)} & H^{(0,2)} & \dots & H^{(2,1)} & H^{(1,1)} & H^{(0,1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ H^{(1,-1)} & H^{(0,-1)} & H^{(-1,-1)} & \dots & H^{(1,-2)} & H^{(0,-2)} & H^{(-1,-2)} & \dots \\ H^{(2,0)} & H^{(1,0)} & H^{(0,0)} & \dots & H^{(2,-1)} & H^{(1,-1)} & H^{(0,-1)} & \dots \\ H^{(3,1)} & H^{(2,1)} & H^{(1,1)} & \dots & H^{(3,0)} & H^{(2,0)} & H^{(1,0)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Observamos que en los bloques de T_0 pertenecientes a una misma columna, hay ceros o están todas las matrices $H^{(k)}$ de una misma subgrilla.

Para $x = 0 = (0,0)$ la ecuación (8.21) se reduce a

$$v(0) = T_0 v(0).$$

Llamamos Φ_Γ al vector columna cuya traspuesta es :

$$\Phi_\Gamma^T = [\Phi_1(\gamma_0), \Phi_2(\gamma_0), \Phi_1(\gamma_1), \Phi_2(\gamma_1), \Phi_1(\gamma_2), \Phi_2(\gamma_2), \dots, \Phi_1(\gamma_q), \Phi_2(\gamma_q)]^T$$

y entonces

$$\Phi_\Gamma = T_0 \Phi_\Gamma. \quad (8.22)$$

Sea ahora $x \in \{D^{-1}(U + e_1)\}$. Si se aplica la ecuación de dilatación, se observa, de forma similar, que los valores de $\begin{bmatrix} \Phi_1(x + \gamma_i) \\ \Phi_2(x + \gamma_i) \end{bmatrix}$ están determinados por sumas de bloques de 2×1 , resultados de productos $H^{(k)} \begin{bmatrix} \Phi_1(Dx + D\gamma_i - k) \\ \Phi_2(Dx + D\gamma_i - k) \end{bmatrix}$, con $k \in \Lambda$. Si para un valor de k el vector columna es no nulo, $Dx + D\gamma_i - k$ debe pertenecer a algún cubrimiento de los soportes de Φ_1 y de Φ_2 . Como $x \in \{D^{-1}(U + e_1)\}$, resulta que $Dx \in U + e_1$ y $Dx - e_1 \in U$. Si sumamos y restamos e_1 , obtenemos $Dx + D\gamma_i - k = (Dx - e_1) + D\gamma_i - k + e_1$. Entonces debe cumplirse que $D\gamma_i - k + e_1 = \gamma_j \in \Gamma$. Luego los valores de $\begin{bmatrix} \Phi_1(x + \gamma_i) \\ \Phi_2(x + \gamma_i) \end{bmatrix}$ están determinados por sumas de productos $H^{(k)} \begin{bmatrix} \Phi_1(Dx - e_1 + \gamma_j) \\ \Phi_2(Dx - e_1 + \gamma_j) \end{bmatrix}$, con $k = D\gamma_i - \gamma_j + e_1$.

En vista de lo anterior, se puede afirmar ahora que existe otra matriz T_1 de tamaño $2(q+1) \times 2(q+1)$ tal que

$$v(x) = T_1 v(Dx - e_1), \quad \text{si } x \in \{D^{-1}(U + e_1)\}. \quad (8.23)$$

La matriz T_1 está formada por bloques de 2×2 . Si numeramos los bloques a partir de $(0,0)$, el bloque (i,j) de T_1 está dado por

$$[T_1]_{i,j} = H^{(D\gamma_i - \gamma_j + e_1)}$$

Ejemplo 8.4. Por ejemplo, para el mismo caso

$$\Gamma = \{(0,0), (1,0), (2,0), \dots, (0,1), (1,1), (2,1), \dots\}$$

y $D = D_1$,

$$T_1 = \begin{bmatrix} H^{(1,0)} & H^{(0,0)} & H^{(-1,0)} & \dots & H^{(1,-1)} & H^{(0,-1)} & H^{(-1,-1)} & \dots \\ H^{(2,1)} & H^{(1,1)} & H^{(0,1)} & \dots & H^{(2,0)} & H^{(1,0)} & H^{(0,0)} & \dots \\ H^{(3,2)} & H^{(2,2)} & H^{(1,2)} & \dots & H^{(3,1)} & H^{(2,1)} & H^{(1,1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ H^{(2,-1)} & H^{(1,-1)} & H^{(0,-1)} & \dots & H^{(2,-2)} & H^{(1,-2)} & H^{(0,-2)} & \dots \\ H^{(3,0)} & H^{(2,0)} & H^{(1,0)} & \dots & H^{(3,-1)} & H^{(2,-1)} & H^{(1,-1)} & \dots \\ H^{(4,1)} & H^{(3,1)} & H^{(2,1)} & \dots & H^{(4,0)} & H^{(3,0)} & H^{(2,0)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

También aquí observamos que en los bloques de T_1 pertenecientes a una misma columna, hay ceros o hay matrices $H^{(k)}$ de una misma subgrilla.

Para $x = D^{-1}e_1 = \beta_1$ la ecuación (8.23) se reduce a

$$v(\beta_1) = T_1 v(0).$$

Llamemos Π a los puntos $\gamma_i + \beta_1$, es decir

$$\Pi = \{\beta_1, \gamma_1 + \beta_1, \gamma_2 + \beta_1, \dots, \gamma_q + \beta_1\} = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_q\}$$

Para la matriz de dilatación $D = D_1$ se tiene $\beta_1 = (0.5, 0.5)$, y para la matriz de dilatación $D = D_2$ se tiene $\beta_1 = (0.5, -0.5)$. Es decir, los puntos de Π son puntos medios entre pares de enteros.

Sea Φ_Π el vector columna:

$$\Phi_\Pi = [\Phi_1(\pi_0), \Phi_2(\pi_0), \Phi_1(\pi_1), \Phi_2(\pi_1), \Phi_1(\pi_2), \Phi_2(\pi_2), \dots, \Phi_1(\pi_q), \Phi_2(\pi_q)]^T$$

entonces $v(\beta_1) = \Phi_\Pi$ y

$$\Phi_\Pi = T_1 \Phi_\Gamma. \quad (8.24)$$

Las fórmulas (8.22) y (8.24) son la consecuencia algebraica de la ecuación de dilatación.

Teorema 8.2. Si $\Phi_1(x)$ y $\Phi_2(x)$ son continuas, entonces v es continua en U .

Demostración. La función $v(x)$ es un vector definido por trozos de funciones continuas en un compacto U , por lo tanto es continua. \square

Queremos analizar la consistencia entre las fórmulas (8.21) y (8.23): si $v(x)$ es continua en U , entonces ambas fórmulas deben valer lo mismo en la intersección de $D^{-1}U$ y $D^{-1}(U + e_1)$.

Lema 8.3. Sea x perteneciente a la frontera de las 2 copias reducidas de U que forman el compacto U , es decir, $x \in \{D^{-1}U\} \cap \{D^{-1}(U + e_1)\}$. Entonces vale

$$T_0 v(Dx) = T_1 v(Dx - e_1)$$

Demostración. Por construcción $v(Dx)$ y $v(Dx - e_1)$ son el mismo vector con un corrimiento en las coordenadas, y T_0 y T_1 están formados por los mismos bloques $H^{(k)}$ salvo corrimientos: se puede observar que vale

$$T_0 v(Dx) = T_1 v(Dx - e_1),$$

y hay consistencia. \square

Como caso particular, si tomamos $x = D^{-1}e_1 = \beta_1$, se obtiene

$$v(\beta_1) = T_0 v(D\beta_1) = T_0 v(e_1) = T_1 v(0) \quad (8.25)$$

que es consistente con 8.5.

Teorema 8.3. Si $x \in U$ y vale 8.4, y v es el vector funcional definido en 8.4, entonces

$$v(x) = T_{d_1} v(\tau x) \quad (8.26)$$

donde

$$\tau x = \begin{cases} Dx, & \text{si } x \in D^{-1}U \\ Dx - e_1, & \text{si } x \in \{D^{-1}(U + e_1)\} \end{cases}$$

y, en general

$$v(x) = T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} v(\tau^m x). \quad (8.27)$$

Demostración. Las afirmaciones son consecuencia de las fórmulas 8.21 y 8.23. \square

Nota 8.3. Si $x \in U$ tiene desarrollo D -ádico finito, entonces

$$v(x) = T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} v(0). \quad (8.28)$$

Ejemplo 8.5. Siguiendo con el ejemplo ya visto en la sección 8.2, si

$$x = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= D^{-1}e_1 + D^{-2}e_0 + D^{-3}e_0 + D^{-4}e_1 \\ x &= (0.1001)_D \end{aligned} \quad (8.29)$$

donde $D = D_1$, entonces

$$v(x) = T_1 T_0 T_0 T_1 v(0).$$

Hemos visto que la multifunción de escala (Φ_1, Φ_2) define un vector funcional v . Este último cumple determinadas propiedades, y la continuidad Hölder de Φ_1 y de Φ_2 implica la continuidad Hölder de v . Todo lo anterior está resumido en el siguiente corolario.

Corolario 8.1. Dada una multifunción de escala $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2]^T$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, Φ_1 y Φ_2 Hölder continuas y de soporte compacto ($B_1 = \text{sop } \Phi_1$, $B_2 = \text{sop } \Phi_2$). La multifunción de escala determina un vector funcional $v : U \rightarrow \mathbb{R}^{2q+2}$ continuo, que verifica

i) Sea $x \in U$. Si para algún $\gamma_k \in \Gamma$, se verifica que $x \in \partial B_1 - \gamma_k$, entonces vale

$$v_{2k}(x) = 0,$$

y si $x \in \partial B_2 - \gamma_k$, entonces

$$v_{2k+1}(x) = 0.$$

Tenemos que $\gamma_0 = (0, 0) \in \Gamma$. Por lo tanto, si $x \in \partial B_1$, vale $v_{2k}(x) = 0$. Y si $x \in \partial B_2$, vale $v_{2k+1}(x) = 0$.

ii) Sea $r \in A$, $\gamma_k \in \Gamma$, y $\gamma_k + r = \gamma_{k'} \in \Gamma$. Entonces para todo $u_0 \in \partial U$, tal que $u_0 + r \in \partial U$, se tiene

$$\begin{aligned} v_{2k}(u_0 + r) &= v_{2k'}(u_0) \\ v_{2k+1}(u_0 + r) &= v_{2k'+1}(u_0), \end{aligned}$$

iii) Si $x \in U$, vale

$$v(x) = T_{d_1} v(\tau x).$$

Además, $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2]^T$ es Hölder continua con exponente de Hölder s , entonces $v(x)$ es Hölder continuo con el mismo exponente, entendiendo por esto que

$$\|v(x) - v(y)\| \leq K \|x - y\|^s,$$

donde a la izquierda $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^{2q+2} , y a la derecha $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^2 .

Hemos visto que la continuidad de Φ implica la continuidad de v . A continuación daremos los lineamientos – sin demostración – de la implicación inversa: veremos como a partir de un vector funcional v con determinadas características se define una multifunción de escala, y como la continuidad Hölder de v implica la continuidad Hölder de ambas funciones de escala.

Lema 8.4. Dado un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, y dado un conjunto de matrices $H^{(k)}$ con $k \in \Lambda$, se pueden obtener

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{sop } \Phi_1 \\ B_2 &= \text{sop } \Phi_2. \end{aligned}$$

Los conjuntos B_1 y B_2 no dependen de los valores específicos que toman las matrices-filtro $H^{(k)}$: dependen de D , de Λ , y de la posición de los valores no nulos de las matrices-filtro.

Lema 8.5. Dada una matriz de dilatación D , un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, $\{H^{(k)}, k \in \Lambda\}$, un conjunto

$$\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q\} \subset \mathbb{Z}^2,$$

con $\gamma_0 = (0, 0)$, 2 conjuntos cerrados y acotados B_1 y B_2 como en 8.4, cuya unión tiene el siguiente cubrimiento

$$B_1 \cup B_2 \subset \bigcup_{r \in \Gamma} (U + r),$$

dado un vector funcional $v : U \rightarrow \mathbb{R}^{2q+2}$ que cumple con i), ii) y iii) del corolario 8.1.

Entonces para $x \in \mathbb{R}^2$ podemos definir

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= 0, & \text{si } x \notin B_1^o \\ \Phi_2(x) &= 0, & \text{si } x \notin B_2^o. \end{aligned}$$

Si $x \in B_1^o$, o bien $x \in B_2^o$, entonces $x = u + \gamma_k$, con $u \in U$ y $\gamma_k \in \Gamma$, y definimos

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \Phi_1(u + \gamma_k) = v_{2k}(u) \\ \Phi_2(x) &= \Phi_2(u + \gamma_k) = v_{2k+1}(u). \end{aligned}$$

Las funciones Φ_1 y Φ_2 así definidas tienen soporte compacto, y verifican la ecuación de dilatación 8.3. Si $v(x)$ es Hölder continuo, entonces Φ_1 y Φ_2 son Hölder continuas con el mismo exponente.

Con lo cual se evidencia la equivalencia entre las funciones de escala Φ_1 , Φ_2 y el vector funcional v .

8.6 El radio espectral conjunto

En esta sección demostraremos que si el radio espectral conjunto de T_0 y T_1 es inferior a 1, entonces el vector funcional v es Hölder continuo – y, en consecuencia, Φ_1 y Φ_2 son Hölder continuas.

Nota 8.4. De la ecuación (8.22), se deduce que Φ_Γ es autovector a derecha de T_0 asociado al autovalor $\lambda = 1$. Veremos que T_1 también tiene un autovalor $\lambda = 1$.

Lema 8.6. Si la multifunción de escala tiene aproximación polinomial de orden 1 – por simplicidad llamamos $v_{00} = w$ –, ambas matrices T_0 y T_1 tienen un autovalor $\lambda = 1$, y el correspondiente autovector a izquierda – para ambas matrices – es

$$W^T = [w_1, w_2, w_1, w_2, w_1, w_2, w_1, w_2, \dots, w_1, w_2]$$

Demostración. Por construcción las columnas de T_0 y de T_1 están formadas por bloques $H^{(k)}$ con índices k pertenecientes a un mismo coset. La aproximación polinomial de orden 1 implica

$$\begin{aligned} w^T \sum_{k \in \Gamma_0} H^{(k)} &= w^T \\ w^T \sum_{k \in \Gamma_1} H^{(k)} &= w^T \end{aligned}$$

y entonces

$$W^T T_0 = W^T$$

y

$$W^T T_1 = W^T.$$

□

Nota 8.5. De 8.27, es evidente que los productos de matrices T_0 y T_1 deben estar acotados. Esto implica que los autovalores de T_0 y los de T_1 verifican $|\lambda_i| \leq 1$.

Sean $x, y \in U \subset \mathbb{R}^2$, $x < y$, ambos con desarrollo D -ádico finito, cercanos uno de otro, tal que

$$\|D^{-1}\|^{m+1} \leq \|x - y\|_2 \leq \|D^{-1}\|^m$$

y que coinciden en los m primeros dígitos. Sin pérdida de generalidad, suponemos que

$$x = \sum_{j=1}^m D^{-j} e_{d_j}, \quad y = \sum_{j=1}^{m'} D^{-j} e_{d'_j}$$

donde $m' > m$, $m' = m + q$, y $d_j = d'_j$ para $j = 1, \dots, m$. Luego

$$\|x - y\| \leq \|D^{-1}\|^{m+1} \sum_{j=m+1}^{m'} \|D^{-1}\|^{j-m-1} \|e_{d'_j}\| \leq \|D^{-1}\|^{m+1} K,$$

donde K es una constante.

Es sabido que si A es una matriz cuadrada no singular, vale

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_i \sigma_i}.$$

Elegimos trabajar con la norma 2, porque para las 2 matrices de dilatación consideradas, vale

$$\|D_1^{-1}\|_2 = \|D_2^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071 < 1,$$

en cambio las normas 1 e infinito de ambas matrices son iguales a 1. Sea $\eta = \sqrt{2}$. Entonces $\|D^{-1}\|_2 = \eta^{-1}$. Luego x e y verifican

$$\eta^{-(m+1)} \leq \|x - y\|_2 \leq \eta^{-m}.$$

Aplicando 8.27, se obtiene

$$v(y) - v(x) = T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} (v(\tau^m y) - v(0)). \quad (8.30)$$

Para analizar la continuidad es necesario estudiar el comportamiento de los productos $T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m}$ sobre todos las posibles diferencias $v(z) - v(0)$, con $z \in U$, donde $v(z)$ tiene desarrollo D -ádico finito. Para esto es importante encontrar un subespacio E de \mathfrak{R}^{2q+2} , que contenga estas diferencias, que sea invariante por T_0 y T_1 , y de manera tal que los autovalores de T_0/E y T_1/E sean estrictamente menores que 1 en valor absoluto.

El subespacio invariante E

Definición 8.1. Sea E el menor subespacio de \mathfrak{R}^{2q+2} , invariante por T_0 y por T_1 , y que contiene a $v(e_1) - v(0)$.

Lema 8.7. El subespacio E está contenido en $W^\perp = \text{gen}\{W\}^\perp$, el complemento ortogonal a W en \mathfrak{R}^{2q+2} .

Demostración. Demostraremos que W^\perp es invariante por T_0 y por T_1 , y que contiene a $v(e_1) - v(0)$. Entonces $E \subset W^\perp$.

Sea $y \in W^\perp$, se tiene que $W^T(T_0 y) = (W^T T_0) y = W^T y = 0$, y por lo tanto $T_0 y \in W^\perp$. De manera análoga, si $y \in W^\perp$, vale $W^T(T_1 y) = (W^T T_1) y = W^T y = 0$, y entonces $T_1 y \in W^\perp$.

Veremos ahora que W^\perp contiene a $v(e_1) - v(0)$. Esto se debe a que

$$v(e_1) - v(0) = \begin{bmatrix} \Phi_1(e_1) \\ \Phi_2(e_1) \\ \Phi_1(e_1 + \gamma_1) \\ \Phi_2(e_1 + \gamma_1) \\ \vdots \\ \Phi_1(e_1 + \gamma_q) \\ \Phi_2(e_1 + \gamma_q) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_1(0) \\ \Phi_2(0) \\ \Phi_1(\gamma_1) \\ \Phi_2(\gamma_1) \\ \vdots \\ \Phi_1(\gamma_q) \\ \Phi_2(\gamma_q) \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} W^T(v(e_1) - v(0)) &= w_1 \{ \Phi_1(e_1) - \Phi_1(0) + \Phi_1(e_1 + \gamma_1) - \Phi_1(\gamma_1) + \dots \\ &\quad + \Phi_1(e_1 + \gamma_q) - \Phi_1(\gamma_q) \} + \\ &\quad + w_2 \{ \Phi_2(e_1) - \Phi_2(0) + \Phi_2(e_1 + \gamma_1) - \Phi_2(\gamma_1) + \dots \\ &\quad + \Phi_2(e_1 + \gamma_q) - \Phi_2(\gamma_q) \}. \end{aligned}$$

Si $e_1 + \gamma_k = \gamma_{k'} \in \Gamma$ entonces $\Phi_1(e_1 + \gamma_k) - \Phi_1(\gamma_{k'}) = 0$ y $\Phi_2(e_1 + \gamma_k) - \Phi_2(\gamma_{k'}) = 0$. Los únicos términos que no se cancelan son los términos $\Phi_1(e_1 + \gamma_k)$ y $\Phi_2(e_1 + \gamma_k)$ con $e_1 + \gamma_k \notin \Gamma$, y los términos $\Phi_1(\gamma_k)$ y $\Phi_2(\gamma_k)$ con $\gamma_k - e_1 \notin \Gamma$. Para los primeros, $e_1 + \gamma_k \notin \text{supp } \Phi_j(x)$, $j = 1, 2$, y entonces $\Phi_j(e_1 + \gamma_k) = 0$, para $j = 1, 2$. Para los segundos, $\gamma_k \in \text{supp } \Phi_j$, y por continuidad de Φ_j vale $\Phi_j(\gamma_k) = 0$. Entonces $W^T(v(e_1) - v(0)) = 0$ y $v(e_1) - v(0) \in W^\perp$. \square

Lema 8.8. *E contiene a todos los vectores $v(z) - v(0)$, donde $z \in U$ y z tiene un desarrollo D -ádico finito.*

Demostración. Sea $z \in U$ tal que z tiene un desarrollo D -ádico finito. Entonces

$$z = \sum_{j=1}^m D^{-j} e_{d_j}.$$

Probaremos que $v(z) - v(0) \in E$ por inducción sobre m .

(i) Sea $m = 1$. Entonces o bien $z = D^{-1}e_0$, o bien $z = D^{-1}e_1$. En el primer caso $z = D^{-1}e_0 = 0$ y $v(z) - v(0) = v(0) - v(0)$ es el vector nulo que pertenece al subespacio E . En el segundo caso, $z = D^{-1}e_1 = \beta_1$. (ver 8.5). Por definición de E , $v(e_1) - v(0) \in E$, y entonces $T_0(v(e_1) - v(0)) \in E$, por ser E invariante por T_0 . Pero

$$T_0(v(e_1) - v(0)) = T_0v(e_1) - T_0v(0) = v(\beta_1) - v(0) = v(z) - v(0).$$

Luego $v(z) - v(0) \in E$.

(ii) Supongamos que E contiene a todos los vectores $v(z) - v(0)$, para los z que tienen una cantidad de dígitos D -ádicos menor o igual a m . Probaremos que E también contiene a todos los vectores $v(z) - v(0)$, para los z que tienen una cantidad de dígitos D -ádicos igual a $m + 1$. Sea

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^{m+1} D^{-j} e_{d_j} = D^{-1} \sum_{k=0}^m D^{-k} e_{d_{k+1}} = \\ &= D^{-1} [e_{d_1} + D^{-1}e_{d_2} + \cdots + D^{-m}e_{d_{m+1}}] = D^{-1} [e_{d_1} + u], \end{aligned}$$

donde u tiene un desarrollo de m dígitos D -ádicos. Analizaremos por separado las dos alternativas posibles: $d_1 = 0$ y $d_1 = 1$.

Si $d_1 = 0$, $z = D^{-1}u \in D^{-1}U$ y por 8.26, $v(z) = T_0 v(Dz) = T_0 v(u)$. Luego

$$v(z) - v(0) = T_0 v(u) - v(0) = T_0 v(u) - T_0 v(0) = T_0 [v(u) - v(0)],$$

donde se aplicó 8.5. Por hipótesis inductiva, $v(u) - v(0) \in E$, y por ser E invariante por T_0 , el vector $T_0 [v(u) - v(0)] \in E$. Entonces $v(z) - v(0) \in E$.

Si $d_1 = 1$, $z = D^{-1}(e_1 + u) \in D^{-1}(e_1 + U)$, y por 8.26, $v(z) = T_1 v(Dz - e_1) = T_1 v(u)$. Luego

$$\begin{aligned} v(z) - v(0) &= T_1 v(u) - v(0) = T_1 v(u) - T_1 v(0) + T_1 v(0) - v(0) \\ &= T_1 [v(u) - v(0)] + [v(\beta_1) - v(0)], \end{aligned}$$

para lo cual se utilizó la ecuación 8.5. Por hipótesis inductiva, $v(u) - v(0) \in E$, y por ser E invariante por T_1 , $T_1 [v(u) - v(0)] \in E$. Por otra parte, como se demostró en el caso $m = 1$, el vector $v(\beta_1) - v(0) \in E$. La suma de dos vectores de un subespacio también pertenece al mismo. Por lo tanto $v(z) - v(0) \in E$. \square

Lema 8.9. *Si ρ , el radio espectral conjunto de T_0/E y T_1/E , es inferior a 1, entonces v es Hölder continuo, y el exponente de Hölder es $s = -\log_\eta(\rho)$, donde $\eta = \sqrt{2}$.*

Demostración. Recordemos que el radio espectral conjunto de 2 matrices T_0/E y T_1/E se definió como

$$\rho = \rho(T_0, T_1) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{d_j=0,1} \|T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} / E\|^{1/m},$$

con lo cual

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} / E\| \leq \rho^m.$$

Acotando en 8.30, y usando que las diferencias $v(\tau^m y) - v(0)$ y $v(y) - v(x)$ pertenecen a E , se tiene

$$\|v(y) - v(x)\| \leq \|T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} / E\| \|v(\tau^m y) - v(0)\|.$$

Trataremos de acotar $\|v(\tau^m y) - v(0)\|$. En efecto,

$$v(\tau^m y) - v(0) = T_{d_{m+1}} \dots T_{d_{m+q}} v(0) - v(0),$$

sumando y restando términos, se tiene

$$\begin{aligned} v(\tau^m y) - v(0) &= T_{d_{m+1}} \dots T_{d_{m+q}} v(0) - T_{d_{m+1}} \dots T_{d_{m+q-1}} v(0) + \\ &\quad + T_{d_{m+1}} \dots T_{d_{m+q-1}} v(0) - T_{d_{m+1}} \dots T_{d_{m+q-2}} v(0) + \\ &\quad + \dots + T_{d_{m+1}} v(0) - v(0) = \\ &= T_{d_{m+1}} \dots T_{d_{m+q-1}} [T_{d_{m+q}} v(0) - v(0)] + \\ &\quad + T_{d_{m+1}} \dots T_{d_{m+q-2}} [T_{d_{m+q-1}} v(0) - v(0)] + \\ &\quad + \dots + [T_{d_{m+1}} v(0) - v(0)], \end{aligned}$$

y suponiendo que $\rho < 1$,

$$\begin{aligned} \|v(\tau^m y) - v(0)\| &\leq \|T_{d_{m+1}} \dots T_{d_{m+q-1}} / E\| \|T_{d_{m+q}} v(0) - v(0)\| + \\ &\quad + \|T_{d_{m+1}} \dots T_{d_{m+q-2}} / E\| \|T_{d_{m+q-1}} v(0) - v(0)\| + \\ &\quad + \dots + \|T_{d_{m+1}} v(0) - v(0)\| \\ &\leq [\rho^{q-1} + \rho^{q-2} + \dots + 1] K_1 = \frac{1 - \rho^q}{1 - \rho} K_1 \leq \frac{1}{1 - \rho} K_1 = K_2, \end{aligned}$$

donde

$$K_1 = \max_{j=0,1} \|T_{d_j} v(0) - v(0)\|.$$

Entonces si $\rho < 1$, es

$$\begin{aligned} \|v(y) - v(x)\| &\leq \|T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} / E\| \|v(\tau^m y) - v(0)\| \\ &\leq \rho^m K_2, \end{aligned}$$

y llamando $K_3 = K_2 \rho^{-1}$, y

$$s = -\log_\eta(\rho), \quad (8.31)$$

se deduce que

$$\|v(y) - v(x)\| \leq \rho^m K_2 = K_2 \rho^{-1} \rho^{m+1} = K_3 (\eta^{-(m+1)})^s \leq K_3 \|x - y\|_2^s. \quad (8.32)$$

Si $\rho < 1$, entonces $s > 0$ y $v(x)$ es Hölder continuo –con exponente s – en los puntos de desarrollo D -ádico finito de U . Esta continuidad es uniforme, porque K_3 y s no dependen de x ni de y . Por razones de densidad de los puntos D -ádicos (desarrollos finitos) en \mathbb{R}^2 , la desigualdad anterior vale para cualquier par de valores x, y en U . \square

Volviendo hacia atrás, dado un conjunto de matrices-filtro $H^{(k)}$, $k \in \Lambda$, se pueden construir las matrices T_0 y T_1 . Si existe un vector $w = v_{00}$ tal que las $H^{(k)}$ verifican la condición de aproximación polinomial de orden 1, entonces T_0 tiene un autovalor $\lambda = 1$. Llamamos $v(0)$ al autovector correspondiente. Para todos los puntos x de U cuyo desarrollo D -ádico es finito, está definido el vector funcional v por medio de la fórmula 8.28. Si $\rho < 1$, el vector $v(x)$ es uniformemente continuo sobre los puntos de desarrollo finito. Entonces existe una única extensión de v sobre todos los puntos de U , que verifica 8.32 para todo $x, y \in U$ con el mismo exponente. Entonces $v(x)$ es Hölder continuo con exponente s . Este vector v a su vez verifica las condiciones i) ii) y iii), y como ya vimos, define 2 funciones de escala Φ_1 y Φ_2 , que son Hölder continuas con exponente s . Y si las funciones de escala son continuas, también lo son las wavelets Ψ_1 y Ψ_2 , por ser combinación lineal finita de las anteriores.

Determinación del subespacio invariante E en casos diferentes

En el capítulo 2 se dieron cotas superior e inferior para $\rho = \rho(T_0, T_1)$:

$$\max_{d_j=0,1} \rho(T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} / E)^{1/m} \leq \rho(T_0/E, T_1/E) \leq \max_{d_j=0,1} \|T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} / E\|^{1/m}, \quad (8.33)$$

donde el término $\rho(T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} / E)$ de la cota inferior se refiere al radio espectral de una sola matriz producto. Si consideramos

$$\rho(T_0 T_0 \dots T_0 / E),$$

es evidente que T_0/E debe tener todos sus autovalores estrictamente inferiores a 1 en módulo para que el radio espectral conjunto ρ sea inferior a 1. Lo mismo vale para T_1/E . Entonces los autovectores de T_0 y T_1 asociados a $\lambda = 1$ no deben estar contenidos en E . De esta manera, se logra que los autovalores de T_0/E y los de T_1/E sean inferiores a 1 en módulo, y que los productos $T_0 T_0 \dots T_0 / E$ y $T_1 T_1 \dots T_1 / E$ sean convergentes.

Aunque no se sepa cual es el "menor" subespacio de \mathfrak{R}^{2q+2} , invariante por T_0 y por T_1 , y que contiene a $v(e_1) - v(0)$, para los cálculos efectuados fue suficiente con encontrar un subespacio E invariante por T_0 y T_1 , que contuviera a $v(e_1) - v(0)$, tal que los autovalores de T_0/E y T_1/E fueran inferiores a 1 en módulo. En la práctica se detectaron 3 situaciones diferentes, para las cuales explicamos a continuación como se eligió el subespacio E .

1) Las matrices T_0 y T_1 tienen ambas un autovalor $\lambda = 1$ simple. Y los demás autovalores verifican $|\lambda_i| < 1$ para ambas matrices. En ese caso, para estimar el radio espectral conjunto, se tomó $E = W^\perp$. La mayoría de las multiwavelets construídas, por ejemplo, D1a2b1-092, D2a2b1-095, D1a3b1-091, cumplían con lo anterior.

2) Las sumas de matrices-filtro sobre las subgrillas verifican

$$S_0^{(00)} = S_1^{(00)} = I.$$

En este caso cualquier vector w del espacio \mathfrak{R}^2 verifica $w^T S_0^{(00)} = w^T S_1^{(00)} = w^T$, la condición de aproximación polinomial de orden 1. Tomando primero $w = [1, 0]$, se construyó

$$W^T = [1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0],$$

y tomando luego $w = [0, 1]$, se construyó

$$V^T = [0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 1, 0].$$

Ambos vectores V y W son autovectores a izquierda de T_0 y T_1 , asociados a $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} W^T T_0 &= W^T & W^T T_1 &= W^T \\ V^T T_0 &= V^T & V^T T_1 &= V^T, \end{aligned}$$

es decir que las matrices T_0 y T_1 tienen ambas un autovalor $\lambda = 1$ doble, no degenerado. En este caso, para estimar el radio espectral conjunto, se tomó $E = \text{gen} \{W, V\}^\perp$. Es fácil ver que E es invariante por T_0 y por T_1 y que contiene a $v(e_1) - v(0)$. Esta situación se dio en el caso de las multiwavelets D1a2b2-299 y D2a2b2-499.

Nótese que para este caso,

$$\tilde{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad w = \hat{\Phi}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y converge 6.3.

3) Las sumas de matrices-filtro sobre las subgrillas verifican

$$S_0^{(00)} = S_1^{(00)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notar que $\tilde{H}(0,0) = S_0^{(00)} = S_1^{(00)}$. Esto sucedió con las multiwavelets D1a3b1-699, D2a3b1-699, D1a3b1-691, y D1a3b2-699. En este caso se tiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S_0^{(00)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} S_1^{(00)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} S_0^{(00)} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} S_1^{(00)} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando

$$W^T = [1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1],$$

y

$$V^T = [1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1],$$

se puede comprobar que

$$\begin{aligned} W^T T_0 &= W^T & W^T T_1 &= W^T \\ V^T T_0 &= -V^T & V^T T_1 &= -V^T, \end{aligned}$$

con lo cual W es autovector a izquierda de T_0 y T_1 , asociado a $\lambda = 1$, y V es autovector a izquierda de T_0 y T_1 , asociado a $\lambda = -1$. En este caso, para estimar el radio espectral conjunto, se tomó $E = \text{gen} \{W, V\}^\perp$. Probaremos que E es invariante por T_0 y por T_1 y que contiene a $v(e_1) - v(0)$.

Sea $y \in E$, es decir $W^T y = 0$, y $V^T y = 0$. Entonces $W^T(T_0 y) = (W^T T_0) y = W^T y = 0$, y además $V^T(T_0 y) = (V^T T_0) y = -V^T y = 0$, por lo tanto $T_0 y \in E$. De manera análoga, si $y \in E$, vale $T_1 y \in E$. Veremos ahora que E contiene a $v(e_1) - v(0)$. Ya se probó que $W^T(v(e_1) - v(0)) = 0$.

$$\begin{aligned} V^T(v(e_1) - v(0)) &= \{\Phi_1(e_1) - \Phi_1(0) + \Phi_1(e_1 + \gamma_1) - \Phi_1(\gamma_1) + \dots \\ &\quad + \Phi_1(e_1 + \gamma_q) - \Phi_1(\gamma_q)\} + \\ &\quad - \{\Phi_2(e_1) - \Phi_2(0) + \Phi_2(e_1 + \gamma_1) - \Phi_2(\gamma_1) + \dots \\ &\quad + \Phi_2(e_1 + \gamma_q) - \Phi_2(\gamma_q)\}. \end{aligned}$$

y con razones similares a las expuestas en el lema 8.7, se deduce que $V^T(v(e_1) - v(0)) = 0$. Entonces $v(e_1) - v(0) \in E$.

Nótese que para este tercer caso,

$$\tilde{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad w = \hat{\Phi}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y converge 6.3.

El cálculo del radio espectral conjunto, como se dijo, es un problema NP-hard. En la tabla se estimó el radio espectral conjunto ρ por medio de su cota inferior, dada en 8.33. Observando los gráficos, vemos que este valor estimado de ρ guarda relación con la suavidad de las funciones de escala.

$d_1 d_2 \dots d_m$	$\rho(T_{d_1}, T_{d_2} \dots T_{d_m} / E)^{1/m}$
0	7.142615e-001
1	7.142615e-001
00	7.142615e-001
01	7.142615e-001
10	7.142615e-001
11	7.142615e-001
000	7.142615e-001
001	7.071068e-001
010	7.071068e-001
011	7.071068e-001
100	7.071068e-001
101	7.071068e-001
110	7.071068e-001
111	7.142615e-001
0000	7.142615e-001
0001	7.071068e-001
0010	7.071068e-001
0011	7.071068e-001
0100	7.071068e-001
0101	7.142615e-001
0110	7.071068e-001
0111	7.071068e-001
1000	7.071068e-001
1001	7.071068e-001
1010	7.142615e-001
1011	7.071068e-001
1100	7.071068e-001
1101	7.071068e-001
1110	7.071068e-001

Tabla 8.1: Valores de $\rho(T_{d_1}, \dots T_{d_m} / E)^{1/m}$ para D1a2b0-001.

8.6.1 Estimación del radio espectral conjunto

Para calcular el radio espectral conjunto, es necesario conocer primero el soporte de las funciones de escala, a fin de realizar un cubrimiento de éste con el conjunto U . Como se dijo, el soporte de las funciones de escala no depende de sus coeficientes, sino de la ubicación de los mismos, es decir, del conjunto Λ .

Para cada configuración de índices contemplada, se utilizaron coeficientes cualesquiera para obtener un gráfico de las funciones de escala, y así obtener su soporte. Luego gráficamente se halló el conjunto Γ , que consiste de los enteros del soporte más los puntos cercanos a él que contribuyen al cubrimiento. Luego se calcularon las matrices T_0 y T_1 , y luego el conjunto E . Con estos datos se calcularon cotas inferiores para ρ , aplicando la fórmula 8.33, y calculando la potencia $\frac{1}{m}$ del máximo autovalor de todos los posibles productos de m matrices $T_{d_1}, T_{d_2} \dots T_{d_m} / E$, para $m = 1, \dots, 10$. En la tabla 8.1 se listan los primeros valores para el caso D1a2b0-001. El factor limitante fue el tiempo, debido a la explosión exponencial de los cálculos. El valor espectral conjunto ρ es el límite superior de estas cotas para $m \rightarrow \infty$, por eso se tomó el máximo de las cotas calculadas como estimación del valor de ρ . Y con este valor se estimó s , el exponente de Hölder, según 8.31, resultando este último una cota superior de s .

En varios casos se ejecutó el algoritmo 2.3 con $\theta = 0.999$ para controlar que efectivamente $\rho < 1$, y

profundidad	#hojas	días	años
10	1024	0.015	-
20	1048576	16	-
30	1073741824	16251	44
40	1099511627776	16641113	45592

Tabla 8.2: Tiempo estimado para el algoritmo 2.3 en función de la profundidad del árbol.

corroborar la continuidad de las funciones de escala: esto se realizó para las multiwavelets que tienen un (*) al lado del valor estimado de ρ en la tabla 6.7. En el algoritmo se construye un árbol binario donde cada nodo está asociado a un producto de la forma $T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m}/E$. Se construye el árbol de manera que todos los nodos terminales cumplan la propiedad $\|T_{d_1}T_{d_2}\dots T_{d_m}/E\|^{1/m} < \theta$. Por simplicidad se trabajó con la norma 1. Si la propiedad no se cumple, se siguen agregando más descendientes al árbol.

En el caso D1a3b2-699 , cuyo gráfico es muy suave – ver figura A.19 – el algoritmo terminó en menos de 6 horas, en una UltraSparcI con plataforma Unix con procesador de 140 Mhz. La profundidad del árbol fue de 14. En todas las hojas se cumplió la condición: la multifunción de escala es continua.

En otro caso, para la multifunción de escala D1a3b1-091, se encontraron ramas de longitud 12,17,18, 20, 21, y 23 que cumplían la propiedad deseada. En una hora, en promedio, el algoritmo llegó a 2753 nodos terminales. El algoritmo tardó 10 días, y se comprobó que, en efecto, la multifunción de escala es continua.

En cambio, se encontraron casos donde fue imposible de comprobar que $\rho < 1$, y el programa se cortó por exceso de tiempo. Por ejemplo, en el caso D2a3b0-009 la longitud promedio de las primeras ramas procesadas que cumplieron la condición fue de 28. Suponiendo que las demás ramas fueran de igual longitud, llevaría 11 años terminar de ejecutar el algoritmo; eso sin cortes de energía eléctrica.

En la tabla 8.2 se dan los tiempos estimados del algoritmo 2.3 en recorrer el árbol según la profundidad del mismo, suponiendo que todas las ramas tienen igual longitud y que hay 8 matrices $H^{(k)}$. Para otras configuraciones de coeficientes, los tiempos son superiores.

Otro caso en el cual fue imposible de verificar que $\rho < 1$ fue el D1a1b1-094: el algoritmo se cortó por tiempo, no terminó en tres semanas. Se encontraron ramas de profundidad 39 y 43. Si la función de escala es continua, y todas las ramas tiene largo mayor o igual a 39, se necesitarían más de 22796 años para demostrar la continuidad con este algoritmo. Recientemente, Blondel, Gaubert y Tsitsiklis [11] demostraron que el cálculo del radio espectral conjunto es un problema NP-hard, reduciendo un problema general de satisfactibilidad a la obtención de ρ . Si se sabe que un problema es NP-hard, se trata de no perder tiempo en una solución eficiente y exacta del problema, y se trata de obtener una solución aproximada al problema o una solución aleatoria del mismo. Con este objetivo se recorrieron al azar 20000 ramas del árbol generado por el algoritmo, y para todas las ramas se llegó a un nodo terminal. El largo mínimo de las ramas fue de 18, y el máximo fue de 46, con un promedio de 26.66. Con estos datos se estimó en 4.4 años el tiempo necesario para que el algoritmo termine.

Últimamente, Blondel y Tsitsiklis demostraron que el cálculo del radio espectral conjunto es un problema no decidible [12].

Capítulo 9

Aplicaciones

A continuación aplicaremos las multiwavelets no separables construídas a diferentes temas de procesamiento de imágenes, tales como compresión, la eliminación de ruido, la ampliación o interpolación de una imagen, y la detección de bordes. Este estudio no es exhaustivo. Una misma multiwavelet puede tener un rendimiento dispar si se la utiliza en aplicaciones diferentes. Los objetivos diferentes de cada aplicación necesitan multiwavelets con propiedades distintas, si bien esto no se comprende en su totalidad en el caso que estamos tratando. Para la compresión dieron buenos resultados las multiwavelets D2a2b1-081 y D1a3b1-091: la primera tienen orden de aproximación polinomial igual a 2 y orden de balanceo igual a 1, y el filtro polifase cumple $F(-1, -1) = 0$; la segunda tiene orden de aproximación polinomial igual a 3 y orden de balanceo igual a 1 y es más suave que la primera; ambas tienen funciones de escala cuyos gráficos son concentrados. Para la eliminación de ruido dió buenos resultados la multiwavelet D1a3b1-691, que es una de las más suaves que se construyeron. Para la ampliación de una imagen, se eligió la multiwavelet D1a2b2-299, que tiene orden de aproximación polinomial igual a 2 y orden de balanceo igual a 2, cuyas funciones de escala tienen un gráfico suave y concentrado. Para la detección de bordes, se utilizó la multiwavelet D1a1b1-094, cuyas funciones de escala tienen muchos picos, y para las cuales no se ha podido comprobar si son Hölder continuas o no.

9.1 Compresión

La transformada wavelet separable ha sido usada con excelentes resultados en la compresión de imágenes digitales. Aquí explicaremos brevemente como se procede para comprimir imágenes con las multiwavelets no separables, lo cual resulta en una operación no lineal.

Después de transformar una imagen bajando J niveles, la función asociada $f(x)$ puede escribirse como

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \left(c_{\cdot, k}^{(-J)} \right)^T |D|^{-J/2} \Phi(D^{-J}x - k) + \\ + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \left(d_{\cdot, k}^{(-j)} \right)^T |D|^{-j/2} \Psi(D^{-j}x - k).$$

Para las multiwavelets estudiadas, el sistema

$$\{|D|^{-J/2} \Phi_1(D^{-J}x - k), |D|^{-J/2} \Phi_2(D^{-J}x - k), |D|^{-J/2} \Psi_1(D^{-J}x - k), \\ |D|^{-J/2} \Psi_2(D^{-J}x - k), \dots, |D|^{-1/2} \Psi_1(D^{-1}x - k), |D|^{-1/2} \Psi_2(D^{-1}x - k)\}$$

Multiwavelet	PSNR (dB)		
	Lena	fotógrafo	teléfono
D1a1b1-094	30.22	30.82	27.28
D1a1b1-081	30.98	32.20	28.50
D1a1b1-070	<u>32.11</u>	<u>32.79</u>	28.48
D1a2b1-092	30.76	31.03	28.32
D2a2b1-095	30.48	31.47	27.26
D2a2b1-081	31.70	<u>32.35</u>	<u>28.81</u>
D1a3b1-091	<u>31.83</u>	<u>32.32</u>	<u>29.14</u>
D1a3b1-691	30.99	30.46	27.50
D1a3b1-298	26.21	29.03	23.78
D2a3b1-699	31.06	30.56	28.00
D1a2b2-299	30.55	31.02	27.54
D2a2b2-499	29.34	30.10	26.26
D1a3b2-699	<u>32.35</u>	31.99	<u>28.77</u>

Tabla 9.1: PSNR de la reconstrucción del 15% de los coeficientes.

es ortonormal, y por lo tanto la suma de cuadrados de los coeficientes

$$c_{1,k}^{(-J)} c_{2,k}^{(-J)} d_{1,k}^{(-J)} d_{2,k}^{(-J)} \dots d_{1,k}^{(-1)} d_{2,k}^{(-1)}$$

es igual a la suma de cuadrados de los coeficientes originales $\{c_{1,k}^{(0)} c_{2,k}^{(0)}\}$. Esto implica que la norma 2 de un error en los coeficientes de la transformada es igual a la norma 2 del error en la imagen reconstruida. Supongamos que se mantiene una cantidad fija de coeficientes de la imagen transformada, y se descarta el resto, entonces el error cuadrático será mínimo si se mantienen los coeficientes más grandes en valor absoluto, y se descartan los más pequeños: esto es lo que se hace al aplicar un umbral.

Con las multiwavelets halladas, cuyas propiedades están apuntadas en la tabla 6.7, se procesaron tres imágenes de prueba:: Lena (256 × 256), fotógrafo (256 × 256), y teléfono (128 × 128). El número de pasos elegido fue el adecuado para que las últimas matrices de aproximación fueran de tamaño 8 × 8. Luego se aplicó un umbral sobre todos los coeficientes de la transformada, de manera a guardar 15% de los coeficientes más grandes en valor absoluto, y descartar el resto. A priori, entonces, se estima que se tendrá una tasa de compresión similar. En la tabla 9.1 se lista el valor del PSNR . Se observa que para los ejemplos que tienen aproximación polinomial de mayor orden, los resultados fueron mejores: PSNR más elevado, y por ende menor error cuadrático. También se puede observar que entre las multiwavelets que tienen el mismo orden de aproximación polinomial, las que poseen además la propiedad de filtro pasa-bajos polifase, tienen un rendimiento superior.

A esta altura del análisis es difícil predecir cual será la tasa de compresión final: se deben cuantizar los coeficientes, y después aplicar un codificador basado en entropía. Pero como las multiwavelets son generalizaciones de las wavelets, creemos que estos resultados pueden mejorar si se imponen más condiciones en la construcción de las funciones.

A la imagen original del fotógrafo se le aplicó la transformada D2a2b1-081 (multiwavelet balanceada con aproximación polinomial de orden 2 y con la propiedad de filtro polifase pasa-bajos $F(-1, -1) = 0$ –ver ecuación 6.24–) de 9 pasos, se retuvo el 15% de los coeficientes más grandes en valor absoluto, y se descartaron los demás. Luego se aplicó la antitransformada. La imagen reconstruida es prácticamente igual a la original. Para que se aprecien las diferencias, se muestra un detalle aumentado de cada una. En

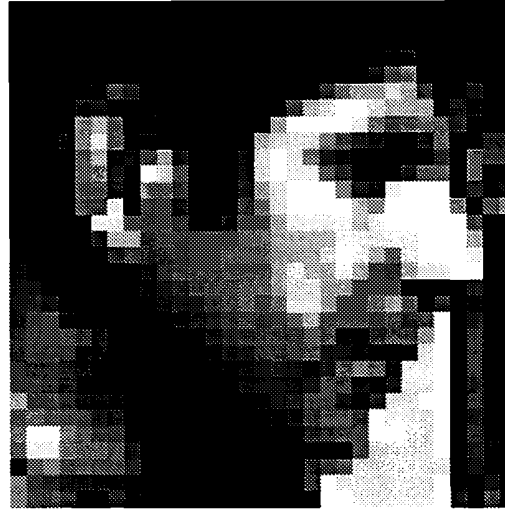


Figura 9.1: Imagen original de un fotógrafo (detalle).

la figura 9.1 se observa un detalle de la imagen original, y en la figura 9.2 se observa el mismo detalle de la imagen reconstruida. El PSNR se lista en la tabla 9.1. Las bordes de las 2 figuras, que corresponden a los rasgos del fotógrafo, son iguales. La figura reconstruida solo difiere de la original en las zonas donde hay variaciones continuas del nivel de gris.

En otra prueba se tomó la imagen original de Einstein, se calculó su transformada con Haar separable, por un lado, y con la multiwavelet no separable D2a2b1-081, por el otro. En ambos casos se bajaron tantos niveles como para que el tamaño de los coeficientes de aproximación fuera de 8×8 . Luego se pasó, en ambos casos, un umbral que dejara el 15% de los coeficientes, mandando los restantes a 0, y se reconstruyeron las imágenes. En el caso Haar, el PSNR fue de 33.81 db. En el caso D2a2b1-081, el PSNR fue de 31.09db. En las figuras 9.3 y 9.4 se observa un detalle de las imágenes reconstruidas. Si bien el error fue menor en el caso Haar, se presentan bloques grandes, mientras que en el caso D2a2b1-081 hay más definición en la imagen.

Finalmente se hicieron dos pruebas para una tasa de compresión muy elevada. En primer lugar se procesó la imagen original de Lena, de 256×256 , y después de obtener la transformada wavelet se pasaron los coeficientes por un umbral, reteniendo tan solo el 2% de los coeficientes de la transformada. Esto se hizo con la wavelet separable Daubechies 4 y con la multiwavelet no separable D2a2b1-081. En las figuras 9.5 y 9.6 se observan las 2 imágenes reconstruidas, con PSNR=25.24db para Daubechies 4 y PSNR=23.5db para D2a2b1-081. Si bien en el caso de la wavelet no separable el error fue menor, en la reconstrucción se evidencian distorsiones verticales y horizontales que vuelven irreconocible a la figura original. En cambio, en el caso de la multiwavelet, se observa un salpicado de puntos blancos, pero aún así se reconocen mejor los rasgos de la figura.

En segundo lugar se procesó la imagen original de Ingrid Daubechies – ver figura 9.7.– con la wavelet separable Haar y con la multiwavelet D2a2b1-081. Esta vez se pasó un umbral de manera a retener solamente el 0.5% de los coeficientes. En el caso Haar, la imagen reconstruida – figura 9.8 – arrojó los valores MSE= 86.38 y PSNR=28.77dB. En cambio, en el caso D2a2b1-081, la imagen reconstruida – figura 9.9 dio un error ligeramente menor: MSE=85.13 y PSNR=28.83dB, a la vez que la calidad visual de la imagen es superior a la de Haar.

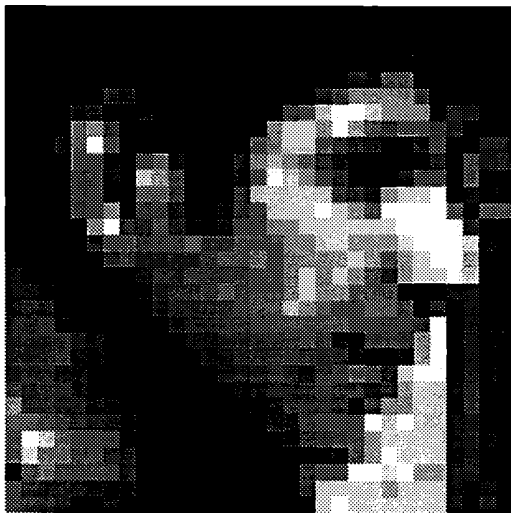


Figura 9.2: Reconstrucción a partir del 15% de los coeficientes de D2a2b1-081.



Figura 9.3: Reconstrucción (detalle) de Haar con 15% de los coeficientes.



Figura 9.4: Reconstrucción de D2a2b1-081 con el 15% de los coefs.



Figura 9.5: Reconstrucción de Daubechies 4 separable reteniendo el 2% de los coeficientes (detalle).



Figura 9.6: Reconstrucción de D2a2b1-081 reteniendo el 2% de los coeficientes (detalle).

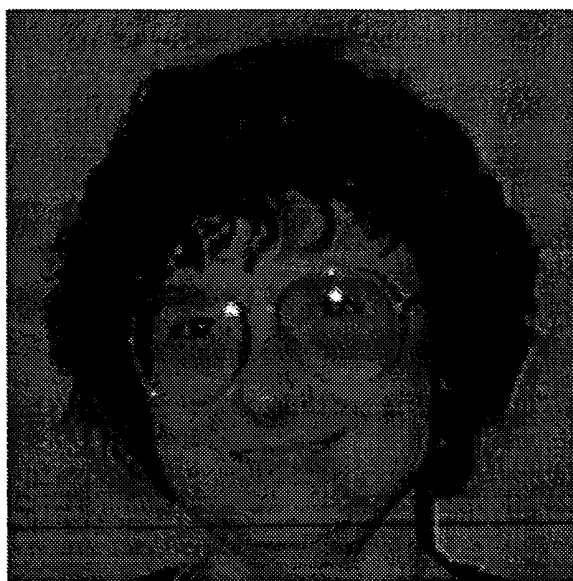


Figura 9.7: Imagen original de Ingrid Daubechies.

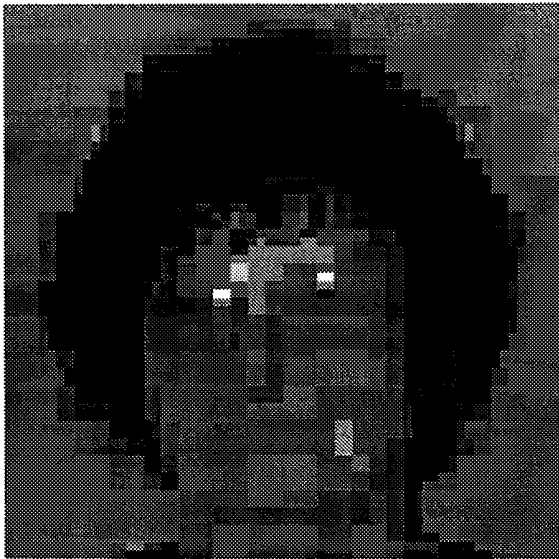


Figura 9.8: Reconstrucción a partir del 0.5% de los coeficientes de la transf. Haar separable.

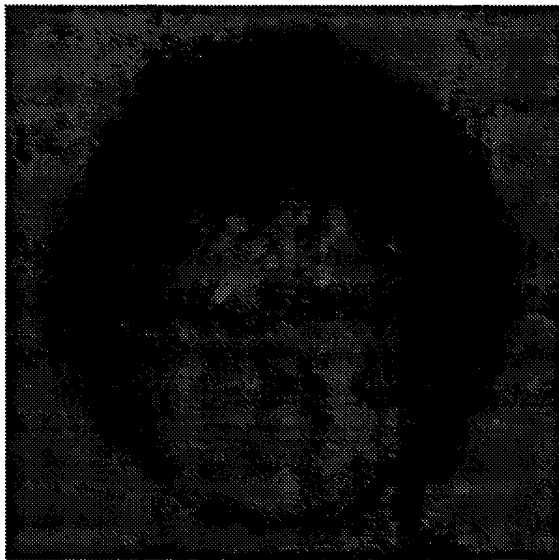


Figura 9.9: Reconstrucción a partir del 0.5% de los coeficientes de D2a2b1-081.

Figura 9.10: Imagen Lena 128×128

9.2 Eliminación de ruido

Las wavelets también pueden aplicarse a la eliminación de ruido de una imagen. La idea detrás de este procedimiento es que la parte más "significativa" de una imagen se puede concentrar en pocos coeficientes wavelets, mientras que el ruido blanco está en los coeficientes más pequeños, que tienen la misma distribución estadística. La eliminación de ruido se realiza pasando los coeficientes de la transformada por un umbral, y antitransformando la imagen. A esto se le llama pasar un umbral duro. También se puede aplicar un umbral blando: los coeficientes mayores que el umbral se "encogen" hacia el valor 0.

$$Q(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \geq u \\ 0 & \text{si } |x| < u \end{cases} \quad \text{Umbral duro}$$

$$Q(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x)^{\frac{1}{2}} [|x| - u + ||x| - u|] & \text{si } |x| \geq u \\ 0 & \text{si } |x| < u \end{cases} \quad \text{Umbral blando}$$

A la imagen original de Lena (9.10) se le sumó ruido gaussiano con media 0 y desviación standard 10, obteniéndose la figura 9.11 Esta última fue transformada con la multiwavelet D1a3b1-691, y luego se aplicó un umbral duro igual a 24. Al antitransformar se obtiene la figura 9.12, en la cual se ha eliminado gran parte del ruido, a la vez que no se han perdido los rasgos más salientes de la figura.

9.3 Interpolación

La interpolación de imágenes (ampliación, zoom-in) se logra por medio de la antitransformada multiwavelet, para lo cual previamente se ponen los detalles en 0. Las funciones suaves son indicadas para interpolar imágenes. Se realizaron 2 pasos de interpolación de la imagen Lena (128×128) con la multiwavelet D1a2b2-299, obteniéndose una imagen ampliada de 256×256 . En la figura 9.13 se tiene un detalle de la imagen original, y en la figura 9.14 se observa el detalle en la imagen ampliada. El resultado es altamente satisfactorio.



Figura 9.11: Lena con ruido.



Figura 9.12: Reconstrucción: transformada D1a3b1-691; umbral duro=24.

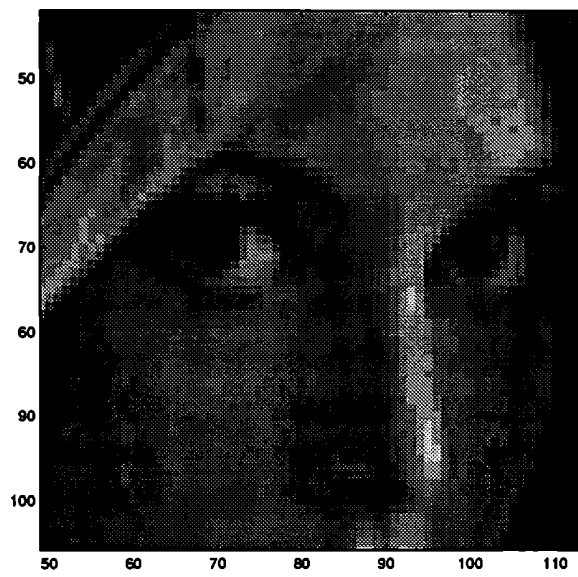


Figura 9.13: Imagen original (detalle)

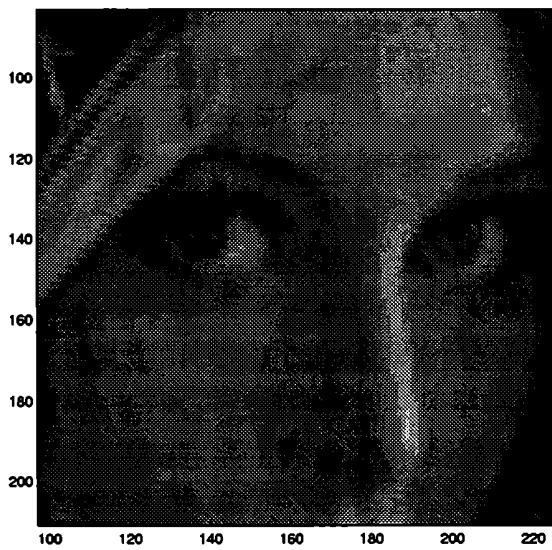


Figura 9.14: Imagen interpolada con D1a2b2-299 (detalle).

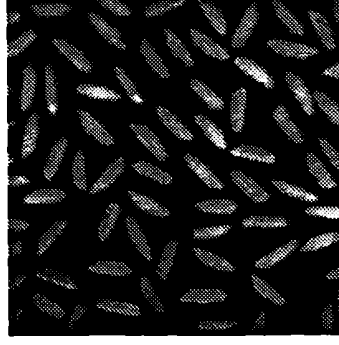


Figura 9.15: Arroz (figura original).

9.4 Detección de bordes

Entre la gran diversidad de aplicaciones de la transformada wavelet, está su capacidad de detectar bordes de una imagen. Esto puede ser de gran importancia: por ejemplo, la detección de bordes en imágenes de sensoramiento remoto puede revelar la existencia de fallas geológicas, y esta información puede ser aprovechada para la exploración de yacimientos petrolíferos.

La proyección de la imagen original en los espacios de detalle fino se puede aprovechar para realzar los bordes de la misma. Se realizó una prueba de extracción de bordes de la imagen original " arroz " de 256×256 que está en la figura 9.15. La imagen se separó en 2 rombos – según las subgrillas – para su posterior procesamiento. Luego se aplicó un paso de la transformada D1a1b1-094, y para cada posición se calculó la norma 2 de los coeficientes de detalle:

$$\|d_{\cdot,k}^{(-1)}\|_2 = \sqrt{[d_{1,k}^{(-1)}]^2 + [d_{2,k}^{(-1)}]^2}.$$

Se eligió un umbral que dejara pasar el 8% de los coeficientes $\|d_{\cdot,k}^{(-1)}\|_2$, y partir de estos últimos se generó una imagen binaria, con valores 1 o 0 según estuvieran arriba o abajo del umbral, obteniéndose la figura 9.16 (a), donde se individualizan bien los granos de arroz. Finalmente, para obtener bordes más finos, se aplicó sobre esta última 4 iteraciones de un algoritmo basado en operaciones morfológicas, mediante el cual un objeto que contiene un agujero se reduce a un anillo entre el borde externo y el borde interno. El resultado se observa en la figura 9.16 (b); los bordes se han identificado correctamente.

Se reprodujo el experimento con dos transformadas wavelet separables: Daubechies 4 y Symmlet 8. Se aplicó sobre la imagen original un paso de la transformada, y para cada posición se calculó la norma 2 de los 3 detalles: vertical, horizontal y diagonal:

$$\|D_k^{(-1)}\|_2 = \sqrt{[LH_k]^2 + [HL_k]^2 + [HH_k]^2}.$$

Una vez realizada la transformada Daubechies 4, se eligió un umbral que dejara pasar el 23% de los coeficientes $\|D_k^{(-1)}\|_2$, y con estos valores se generó una imagen binaria– ver figura 9.17(a). Es notoria la poca definición de los bordes y la ausencia de algunos de ellos. Para tratar de incorporar más bordes, se bajó el umbral, hasta dejar pasar el 37% de los coeficientes. La imagen binaria resultante está en la figura 9.17(b): algunos bordes siguen imprecisos, a la vez que ha comenzado a llenarse el interior de los granos de arroz, haciendo más difícil la identificación de los contornos. Es de notar que se necesitan el

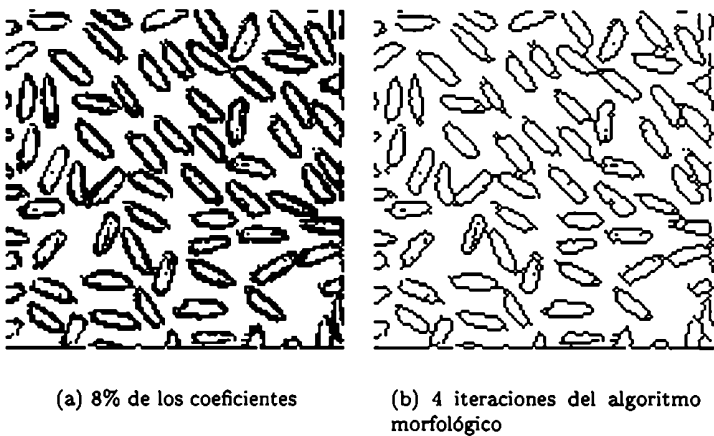


Figura 9.16: Detección de bordes con la multiwavelet D1a1b1-094.

Imagen: Rectas	D1a1b1-094	Daubechies 4	Symmlet8
bordes bien detectados	15	14	13
falsos bordes	1	1	9
bordes faltantes	4	5	6

Tabla 9.2: Aciertos en la detección de bordes

37% de los coeficientes de detalle para lograr un resultado inferior al que se consigue con un 8% de los coeficientes de detalle de D1a1b1-094.

Se procedió en forma similar con la transformada Symmlet8. Tanto con un umbral que deja pasar el 26% de los coeficientes de detalle – ver figura 9.18(a) – como con un umbral que deja pasar el 40% de los coeficientes de detalle – ver figura 9.18(b) – los resultados son muy pobres en cuanto a la detección de bordes.

Por último se probó la técnica anterior sobre la imagen sintética 9.19. El umbral se tomó (en cada caso) de manera que se reconocieran la mayor cantidad de bordes de la imagen. En la tabla 9.2 figuran la cantidad de aciertos en la detección de bordes. Estos resultados son consistentes con los anteriores.

Existen técnicas más complejas para la detección de bordes de una imagen [65] que llevaría tiempo adaptar para las multiwavelets construídas. Sin embargo, estas pruebas sencillas indican que las multiwavelets no separables pueden ser una herramienta eficiente en cuanto a la identificación de bordes, superando en su desempeño a las wavelets separables.

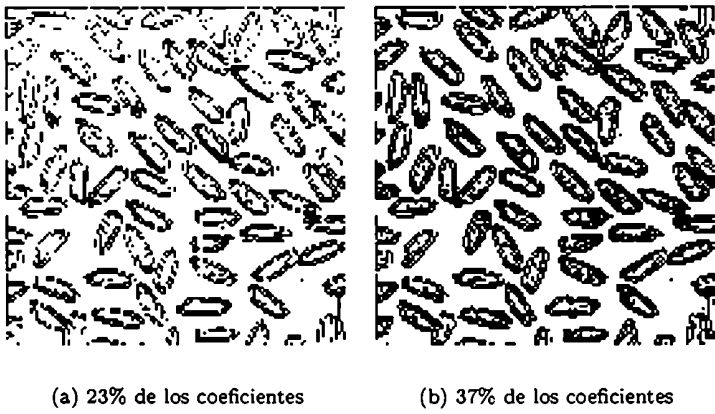


Figura 9.17: Detección de bordes con la wavelet Daubechies 4.

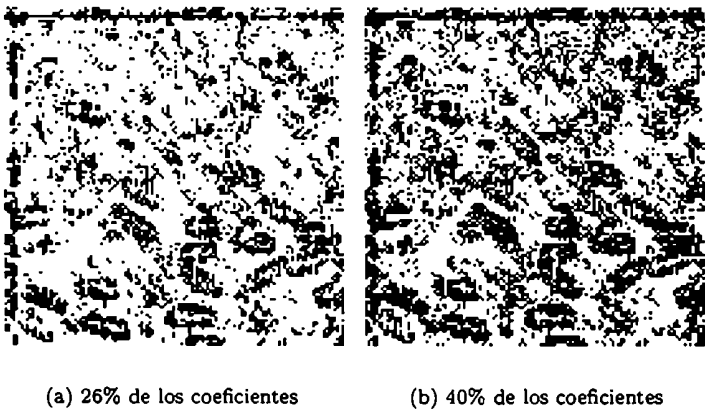


Figura 9.18: Detección de bordes con la wavelet Symmlet 8.

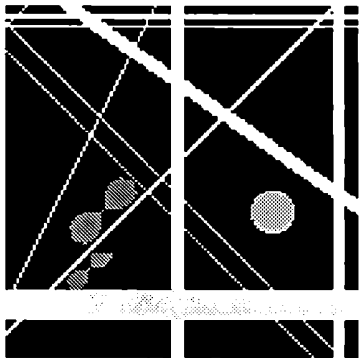


Figura 9.19: Imagen "Rectas".

Capítulo 10

Conclusiones

Se ha hecho un aporte original al tema de las wavelets, estudiando una generalización de las mismas, a saber, las multiwavelets bidimensionales no separables. Se ha realizado un análisis en profundidad de la teoría de estas funciones, y se han contruido varios ejemplos de este nuevo tipo de wavelet, para el cual hasta el momento no existían ejemplos concretos.

Se han traducido las propiedades de las multiwavelets no separables a condiciones algebraicas sobre sus coeficientes. Se ha presentado un procedimiento para la construcción de multifunciones de escala y multiwavelets ortogonales, no separables, asociadas a una decimación diagonal. Las multifunciones de escala obtenidas son balanceadas, tienen aproximación polinomial de órdenes 1 a 3, y diferentes propiedades de filtros polifase pasa-bajos y pasa-altos. Este procedimiento puede ser generalizado para la obtención de multiwavelets que verifiquen otras propiedades.

Para la construcción de estas wavelets se hizo una revisión de toda la teoría de las wavelets tradicionales, y del procesamiento de señales con ellas, adaptando las construcciones al nuevo tipo de wavelets buscado. Se realizaron paquetes de rutinas para calcular la transformada multiwavelet no separable a imágenes. Se ideó una manera adecuada para descomponer una imagen en dos imágenes de entrada, y se han indicado las fórmulas de análisis y de síntesis, ilustrando los primeros pasos de la transformada para algunas de las multiwavelets halladas.

Se han listado los coeficientes de 11 de las multiwavelets construídas. Para cada caso, se han obtenido, en forma numérica, aproximaciones a los gráficos de las dos funciones de escala y de las dos wavelets asociadas. No es sencillo el cálculo del radio espectral conjunto de 2 matrices, vinculado al cálculo del exponente Hölder: este último permite decidir si la función hallada es uniformemente continua o no. Recientemente se ha demostrado que este problema es no decidible. Sin embargo, en todos los ejemplos de multiwavelets construídas se ha dado una estimación del radio espectral conjunto y del exponente Hölder, y se ejecutó un programa que, en la mayoría de los casos, permitió confirmar la continuidad de las multiwavelets halladas.

Previamente, se hizo un repaso de la teoría de las wavelets clásicas: wavelets en una dimensión, wavelets no separables en 2 dimensiones, multiwavelets en una dimensión, y finalmente, el caso que nos ocupa: multiwavelets no separables en 2 dimensiones. A lo largo de los capítulos, se analizaron las relaciones que existen entre las distintas propiedades de las wavelets, y como cambian las relaciones según el tipo de wavelet. Se estudió como un conjunto de propiedades, que en el caso de las wavelets de dimensión 1 son todas equivalentes entre sí, se va diversificando y se vuelve más compleja su caracterización, siendo algunas de ellas mutuamente excluyentes. También se mostró, con fórmulas y con ilustraciones, como se procesan señales e imágenes con cada tipo de wavelet diferente.

Asimismo, se mostraron diferentes aplicaciones para las multiwavelets halladas, obteniéndose resultados satisfactorios en la interpolación de imágenes, en la detección de bordes, y en la compresión de imágenes para tasas elevadas de compresión, lo cual indica que estas wavelets son potencialmente una

herramienta eficiente para la magnificación de imágenes, la extracción de bordes y para la compresión de imágenes.

Una posible línea de investigación futura es la explotación de todas las características de este tipo de wavelets a aplicaciones específicas: por ejemplo, la cuantización óptima de los coeficientes de detalle teniendo en cuenta la distribución de los mismos para la compresión de imágenes y de video.

Bibliografía

- [1] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Appl Mathematics, 1992.
- [2] G.Strang and T.Ñguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley Cambridge Press, 1996.
- [3] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1999.
- [4] S. Mallat, "A theory of multiresolution signal decomposition: The wavelet representation," *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intell.*, vol. PAMI-11, No 7, 1989.
- [5] J. Tian and R. Wells, "A remark on vanishing moments," *IEEE Proc of 30th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, A. Singh, editor, pp. 938–987, 1996.
- [6] I. Daubechies and J. Lagarias, "Two-scale difference equations: I.existence and global regularity of the solutions," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 22, pp. 1388–1410, 1991.
- [7] I. Daubechies and J. Lagarias, "Two-scale difference equations: II.local regularity, infinite products, and fractals," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 23, pp. 1031–1079, 1992.
- [8] D. Colella and C. Heil, "The characterization of continuous four-coefficient scaling functions and wavelets," *IEEE Trans. Inf. Theor.*, *Special Issue on Wavelet Transforms and Multiresolution Signal Analysis*, vol. 38, pp. 876–881, 1992.
- [9] C. Heil and D. Colella, *Dilation Equations and the Smoothness of Compactly Supported Wavelets*. J. Benedetto and M. Frazier, editors, CRC Press, 1994.
- [10] V. Blondel, J. Theys, and A. Vladimirov, "An elementary counterexample to the finiteness conjecture," *preprint*, 2001.
- [11] V. Blondel, S. Gaubert, and J. Tsitsiklis, "Approximating the spectral radius of sets of matrices in the max-algebra is np-hard," *preprint*.
- [12] V. Blondel and J. Tsitsiklis, "The boundedness of all products of a pair of matrices is undecidable," *Elsevier Systems & Control Letters*, vol. 41, pp. 135–140, 2000.
- [13] J. M. Shapiro, "Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients," *IEEE Trans Signal Proc.*, vol. 41, pp. 3445–3462, 1993.
- [14] A. Said and W. Pearlman, "An image multiresolution representation for lossless and lossy compression," *IEEE Trans Image Proc.*, vol. 5, no. 9, 1996.
- [15] F. Sheng, A. Bilgin, P. Sementilli, and M. Marcellin, "Lossy and lossless image compression using reversible integer wavelet transforms," *ICIP*, 1998.

- [16] N. Rajpoot and R. Wilson, "Progressive image coding using augmented zerotrees of wavelet coefficients," *preprint*, 1998.
- [17] P. Manzano, J. M. Ricci, and A. Ruedin, "Embedded lossy and lossless image compression based on integer wavelet transform with hybrid zerotree and bitplane coding," *Wavelet Applications in Signal and Image Processing IX*, A. Aldroubi, A. Laine, M. Unser, Editors, *Proceedings of SPIE*, vol. 4478, pp. 290–298, 2001.
- [18] P. Manzano and J. M. Ricci, "Un compresor de imgenes embebido con y sin prdida basado en wavelets," *Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires*, febrero 2000.
- [19] G. Wallace, "The jpeg still picture compression standard," *IEEE Trans. Consumer Electronics*, vol. 38, 1992.
- [20] A. Skodras, C. Christopoulos, and T. Ebrahimi, "Jpeg2000: The upcoming still image compression standard," *Elsevier, Pattern Recognition Letters*, vol. 22, pp. 1337–1345, 2001.
- [21] A. Skodras, C. Christopoulos, and T. Ebrahimi, "The jpeg 2000 still image compression standard," *IEEE Signal Processing Magazine*, September 2001.
- [22] A. Ayache, "Construction of non-separable dyadic compactly supported orthonormal wavelet bases $l^2(r^2)$ of arbitrarily high regularity," *Revista Mat. Iberoamericana*, vol. 15, pp. 37–58, 1999.
- [23] J. Kovacevic and M. Vetterli, "New results on multidimensional filter banks and wavelets," *preprint*.
- [24] W. He and W. Lai, "Examples of bivariate non-separable continuous compactly supported orthonormal wavelets," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 9, pp. 949–953, 2000.
- [25] J.-C. Faugère, F. M. de Saint-Martin, and F. Rouillier, "Design of regular nonseparable bidimensional wavelets using grobner basis techniques," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, no. 4, pp. 845–856, 1998.
- [26] E. Belogay and Y. Wang, "Arbitrarily smooth orthogonal nonseparable wavelets in r^2 ," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 30, no. 3, pp. 678–697.
- [27] J. Kovacevic and M. Vetterli, "Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for r^n ," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, no. 2, pp. 533–555, 1992.
- [28] A. Cohen and I. Daubechies, "Non-separable bidimensional wavelet bases," *Revista Matematica Iberoamericana*, vol. 9, no. 1, pp. 51–137, 1993.
- [29] J. Geronimo, D. Hardin, and P. Massopust, "Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions," *Journal of Approximation Theory*, vol. 78, pp. 373–401, 1994.
- [30] X.-G. Xia and B. Suter, "Vector-valued wavelets and vector filter banks," *IEEE Trans on Signal Proc.*, vol. 44, no. 3, pp. 508–518, 1996.
- [31] X.-G. Xia and B. Suter, "Multirate filter banks with block sampling," *IEEE Trans on Signal Proc.*, vol. 44, no. 3, pp. 484–496, 1996.
- [32] W. Lawton, S. Lee, and Z. Shen, "Stability and orthonormality of multivariate refinable functions," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 28, no. 4, pp. 999–1014, 1997.
- [33] Q. Jiang, "On the design of multifilter banks and orthonormal multiwavelet bases," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 12, pp. 3292–3303, 1998.

- [34] J. Tham, L. Shen, S. Lee, and H. Tan, "A general approach for analysis and applications of discrete multiwavelet transforms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 2, pp. 457–464, 2000.
- [35] J. Lebrun and M. Vetterli, "High-order balanced multiwavelets: Theory, factorization, and design," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 9, 2001.
- [36] V. Strela, *Multiwavelets: Theory and Applications*. PhD thesis, MIT, June 1996.
- [37] V. Strela, P. Heller, G. Strang, P. Topiwala, and C. Heil, "The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing," *IEEE Transactions in Image Processing*, to appear.
- [38] G. Plonka and V. Strela, "Construction of multiscaling functions with approximation and symmetry," *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, vol. 29, no. 2, pp. 481–510, 1998.
- [39] T. Xia and Q. Jiang, "Optimal multifiler banks: Design related symmetric extension transform and application to image compression," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 7, pp. 1878–1889, 1999.
- [40] J. Lebrun and M. Vetterli, "Balanced multiwavelets: Theory and design," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 4, pp. 1119–1125, 1998.
- [41] I. Selesnick, "Balanced multiwavelet bases based on symmetric fir filters," *Proceedings SPIE, Wavelet Applications in Signal Processing VII*, vol. 3813, pp. 122–131, 1999.
- [42] W. Lawton, S. Lee, and Z. Shen, "An algorithm for matrix extension and wavelet construction," *Mathematics of Computation*, vol. 65, pp. 723–737, 1996.
- [43] V. Strela, P. Heller, G. Strang, P. Topiwala, and C. Heil, "The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing," *IEEE Transactions on Information Theory*, 1996.
- [44] X.-G. Xia, J. Geronimo, D. Hardin, and B. Suter, "Design of prefilters for discrete multiwavelet transform," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 1, pp. 25–35, 1996.
- [45] M. Cotronei, L. Montefusco, and L. Puccio, "Multiwavelet analysis and signal processing," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, Special ISSUE on Multirate System, Filter Banks, Wavelets, and Applications*, to appear.
- [46] S. Bacchelli, M. Cotronei, and T. Sauer, "Multifilters with and without prefilters," *preprint*.
- [47] J. Miller and C.-C. Li, "Adaptive multiwavelet initialization," *IEEE Transactions on Signal Proc.*, vol. 46, no. 12, pp. 3282–3291, 1998.
- [48] X.-G. Xia, "A new prefilter design for discrete multiwavelet transforms," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, no. 6, pp. 1558–1570, 1998.
- [49] P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- [50] P. Massopust, D. Ruch, and P. van Fleet, "On the support properties of scaling vectors," *App. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 3, pp. 229–238, 1996.
- [51] C. Heil, G. Strang, and V. Strela, "Approximation by translates of refinable functions," *Numer. Math.*, vol. 73, pp. 75–94, 1996.
- [52] G. Plonka, "Approximation order provided by refinable function vectors," *Constr. Approx.*, vol. 13, pp. 221–244, 1997.

- [53] C. Cabrelli, C. Heil, and U. Molter, *Polynomial Reproduction by Refinable Functions*. Ka-Sing Lau, 1999.
- [54] I. Selesnick, "Multiwavelet bases with extra approximation properties," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, pp. 2898–2908, 1998.
- [55] C. Cabrelli, C. Heil, and U. Molter, "Self-similarity and multiwavelets in higher dimensions," *preprint*, pp. 5–52, 1999.
- [56] C. Cabrelli, C. Heil, and U. Molter, "Accuracy of lattice translates of several multidimensional refinable functions," *Journal of Approximation Theory*, vol. 95, no. 1, pp. 5–52, 1998.
- [57] A. Ruedin, "Nonseparable orthogonal multiwavelets with 2 and 3 vanishing moments on the quincunx grid," *Proceedings SPIE Wavelet Appl. Signal Image Proc. VII*, vol. 3813, pp. 455–466, 1999.
- [58] J. Lebrun and M. Vetterli, "High order balanced multiwavelets," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Processing*, 1998.
- [59] A. M. C. Ruedin, "Balanced nonseparable orthogonal multiwavelets with two and three vanishing moments on the quincunx grid," *Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII*, A. Aldroubi, A. Laine, M. Unser, Editors, *Proceedings of SPIE*, vol. 4119, pp. 519–527, 2000.
- [60] A. M. C. Ruedin, "Construction of nonseparable multiwavelets for nonlinear image compression," *Eurasip Journal of Applied Signal Processing*, vol. 2002, issue 1, pp. 73–79, 2002.
- [61] J. Dennis and R. Schnabel, *Numerical methods for unconstrained optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall, 1983.
- [62] C. Cabrelli and M. L. Gordillo, "Existence of multiwavelets in \mathbb{R}^n ," *Proceedings of AMS*, 2000.
- [63] W. Lawton and M. Resnikoff, "Multidimensional wavelet bases," *preprint*, AWARE, 1990.
- [64] K. Grochenig and W. Madych, "Multiresolution analysis, haar bases, and self-similar tilings," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 38, Part 2, pp. 558–568, 1992.
- [65] S. Mallat, "Characterization of signals from multiscale edges," *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intell.*, vol. 14, pp. 710–732, 1992.
- [66] B. Alpert, G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rohklin, "Wavelet-like bases for the fast solution of second kind integral equations," *SIAM, J. Sci. Comp.*, vol. 14, pp. 159–184, 1993.
- [67] I. Daubechies and W. Sweldens, "Factoring wavelet and subband transforms into lifting steps," *preprint*, 1996.
- [68] T. Flaherty and Y. Wang, "Haar-type multiwavelet bases and self-affine multi-tiles," *preprint*.
- [69] P. Hornby, F. Boschetti, F. Horowitz, and N. Archibald, "Potential field wavelets as a tool in exploration," *Geol. Soc. Aust., SG2/SGTSG Meeting, Geological Structures and their Geophysical Signatures*, 1997.
- [70] H. Ji, S. Riemenschneider, and Z. Shen, "Multivariate compactly supported fundamental refinable functions, duals and biorthogonal wavelets," *Studies in Applied Mathematics*, to appear.
- [71] J. Ortega. Academic Press, New York, 1972.
- [72] V. Strela and A. Walden, "Orthogonal and biorthogonal multiwavelets for signal denoising and image compression," *preprint*.

- [73] W. Sweldens, "The lifting scheme: a construction of second generation wavelets," *preprint*, 1996.
- [74] L. Villemoes, *Regularity of Two-Scale Difference Equations and Wavelets*. PhD thesis, 1992.

Apéndice A

A.1 Configuraciones de índices

A.1.1 8 matrices $H^{(k)}$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H^{K(:,j)} = \begin{bmatrix} C_{j,1} & C_{j,2} \\ C_{j,3} & C_{j,4} \end{bmatrix} \quad G^{K(:,j)} = \begin{bmatrix} F_{j,1} & F_{j,2} \\ F_{j,3} & F_{j,4} \end{bmatrix} \quad j = 1, 8$$

Caso D1a2b0-001

Asociada a D_1 , tiene aproximación polinomial de orden 2 y no es balanceada. En la figura 7.4 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura 7.5, está el gráfico de la multiwavelet.

$$C = \begin{bmatrix} -2.626160679713805e-01 & 4.298190662052453e-01 & 5.574439165755106e-04 & 2.030577672486614e-01 \\ 1.242648247580673e-03 & -4.949250389580165e-01 & -4.087197848704140e-02 & -1.920926795673339e-01 \\ 4.558392979832848e-01 & -1.083434020875271e-01 & 7.067450157033679e-02 & -6.733026425532026e-02 \\ 1.034743040866529e+00 & -3.333696001690321e-01 & 9.862921928735455e-02 & -1.130957347361809e-01 \\ 2.172276225143630e-02 & -1.035804504304439e-01 & -7.282848187529292e-01 & 3.266159537916353e-01 \\ 1.352776907773978e-02 & 1.053548733239501e-01 & 1.754376582933197e-01 & -5.539904957294699e-01 \\ 6.187080392960997e-02 & -1.876314721922069e-01 & -2.843099039597212e-01 & 5.949251108985801e-01 \\ -1.107154498212539e-02 & -1.958066410598297e-01 & -1.833149882352274e-01 & 6.67084066446144e-01 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -2.505076364401196e-01 & -4.781014678366201e-01 & -2.338736603196415e-01 & -6.191230886449632e-01 \\ 1.791338596192151e-01 & 3.698561554264868e-01 & 2.018565875878165e-01 & 5.079611211553948e-01 \\ 1.228863053648603e-01 & 2.778965464245189e-01 & 5.404378263769143e-02 & 3.336097481604906e-01 \\ 5.480310264093360e-01 & 1.775103678140814e-01 & 4.262392169076767e-01 & 2.621179369421564e-01 \\ 6.579935325422615e-01 & 2.717452938112736e-01 & -7.306136754313313e-01 & -1.739793854322464e-01 \\ -2.733458226543651e-01 & -3.703153321649716e-02 & 2.780180749731004e-01 & -7.995778285125185e-02 \\ -6.643810543499476e-02 & 4.926342374342901e-01 & 1.011224100411908e-03 & -3.155633751585577e-01 \\ 2.669940163778924e-01 & 4.637532222175084e-01 & -2.739883667132216e-01 & -2.752764143568751e-01 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_{00}^T &= [3.106289083238109e+00 & -2.393973994813155e+00] \\ v_{10}^T &= [5.421695902464955e+00 & -3.884789392579281e+00] \\ v_{01}^T &= [2.897232133286426e+00 & -3.342884794017154e+00] \end{aligned}$$

Caso D1a1b1-094

Asociada a D_1 , tiene aproximación polinomial de orden 1 y balanceo de orden 1. En la figura A.1 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.2, está el gráfico de la multiwavelet.

$C =$	6.520270356441953e - 01	4.798838581487501e - 01	6.685716967951928e - 01	1.501188355539554e - 01
	7.720895178278543e - 01	3.695291363223874e - 01	3.364186851122772e - 01	1.575939289749661e - 01
	9.895395026948005e - 02	-4.851098423632952e - 02	-4.446132915564137e - 01	2.613746033182813e - 01
	-8.527955606696803e - 02	-3.369786906966273e - 02	2.507420082310971e - 01	1.221044046932553e - 01
	-2.097158351322485e - 02	-1.062679758454916e - 01	4.010239573724742e - 02	2.190290350128108e - 01
$F =$	1.400449838128100e - 01	-1.364705496799771e - 01	-2.946467291436676e - 01	2.822317810495860e - 01
	6.636074585458129e - 02	4.653653002401353e - 01	-5.743094923105740e - 02	-4.209926721921110e - 01
	-7.469923304753995e - 02	-5.653567764609854e - 01	-7.466967682587170e - 02	8.040659441704566e - 01
	4.717612945266081e - 01	-2.190701720352569e - 01	3.934940717240047e - 02	-2.350731178134999e - 01
	-1.953173005944949e - 01	-9.914300984965843e - 02	-3.049401278054655e - 01	-1.485872742057537e - 01
	5.499103258675989e - 01	-3.174506703490569e - 01	-6.029582290093598e - 01	3.468278554299923e - 01
	-3.109846480565991e - 01	-1.564400401990952e - 01	3.411682434453576e - 01	1.726907078286930e - 01
	7.526702301130656e - 02	4.597241688970807e - 01	3.573671883892826e - 02	2.408575059887805e - 01
	-6.355516953741310e - 01	5.960973282305622e - 01	-3.400811342150930e - 01	3.129093643994522e - 01
	-2.013329150626043e - 02	-1.120920595613271e - 01	1.175574111494670e - 01	7.856210633156636e - 01
	2.447876206891436e - 01	-3.303645736990850e - 01	-4.283005566942050e - 01	-3.327778378255872e - 01

$v_{00}^T = [\quad 1 \quad 1 \quad]$

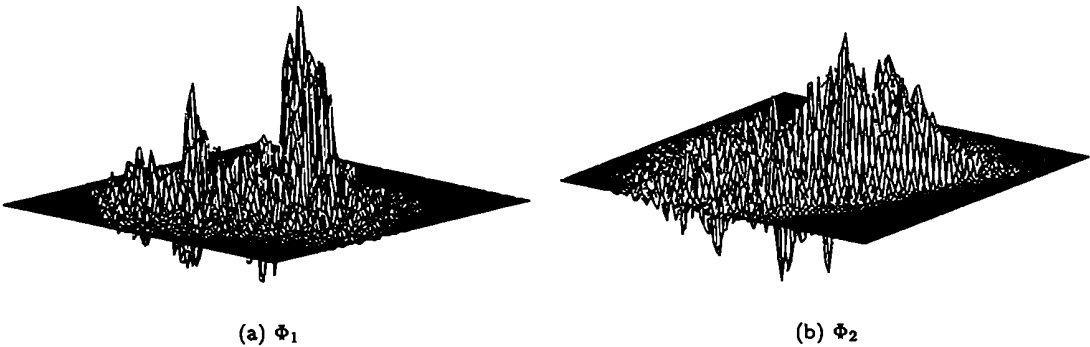


Figura A.1: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a1b1-094.

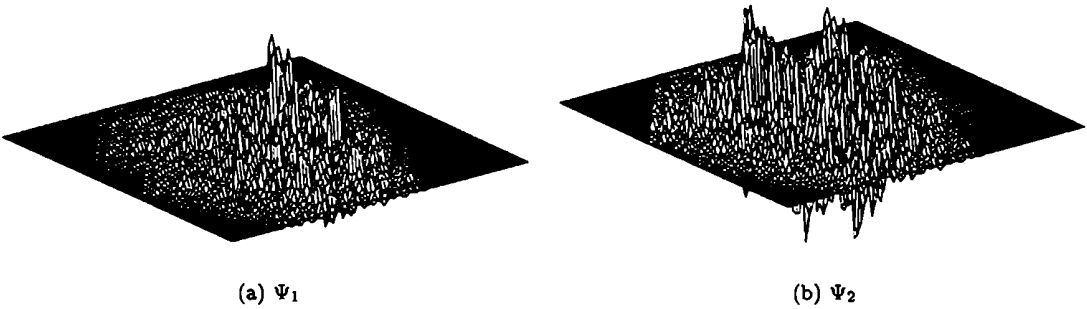


Figura A.2: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a1b1-094.

Caso D2a2b1-095

Asociada a D_2 , tiene aproximación polinomial de orden 2 y balanceo de orden 1. En la figura A.3 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.4, está el gráfico de la multiwavelet.

C =	1.818994328336864e - 01	4.737258617695727e - 01	-2.410341867925535e - 01	-5.113781284424532e - 01
	1.264726249200982e - 01	4.452784987370811e - 02	-7.547376908401850e - 02	-5.949064416777974e - 02
	-4.264036953617692e - 01	2.899121996191564e - 01	2.891595381910819e - 01	-2.535593896942059e - 01
	6.785748472970252e - 02	-6.465604028952401e - 01	2.304071210868251e - 01	6.726740337993678e - 01
	2.699200960915147e - 01	7.119530893865917e - 01	3.878871026742011e - 01	7.129048197589984e - 01
F =	2.587700338519293e - 02	1.434937560948804e - 01	8.574918570084459e - 02	7.262432076781536e - 02
	4.130180076145299e - 01	-2.766207556281615e - 01	1.255556747491677e - 01	-1.479376967696677e - 01
	3.494823632835272e - 01	2.524468845827654e - 01	1.896277859779262e - 01	5.223842002447062e - 01
	1.752715093822290e - 01	-2.625981620330736e - 01	-4.863146148954584e - 01	-3.986841344308550e - 02
	-4.474013121169129e - 01	4.591490393164206e - 02	6.329852459216150e - 01	-1.241807703165702e - 01
	-3.375117841995116e - 01	7.693518183970809e - 02	-1.594376837782671e - 01	5.455199895041656e - 03
	7.939633934189312e - 01	1.099809485746109e - 01	5.249593452339714e - 01	1.781764896891578e - 01
	3.089244358019187e - 01	-3.411423910208246e - 01	-6.723620524050291e - 01	1.110274117888935e - 01
	2.105859744699576e - 01	-3.335874585020447e - 01	-3.594768394629649e - 01	4.540733819084103e - 01
	4.613287486239152e - 01	-1.939932061064666e - 01	2.585205490073878e - 01	-9.968588881549180e - 02
	2.423495517404536e - 01	-8.09040338034664e - 01	1.240777884354346e - 01	-3.479491517636619e - 01

$$\begin{aligned} \psi_{00}^T &= [\quad 1 \quad 1 \quad] \\ \psi_{10}^T &= [\quad -9.459031006308423e - 02 \quad -4.523779414694337e - 01 \quad] \\ \psi_{01}^T &= [\quad -1.375680764836481e + 00 \quad -1.631041913685503e + 00 \quad] \end{aligned}$$

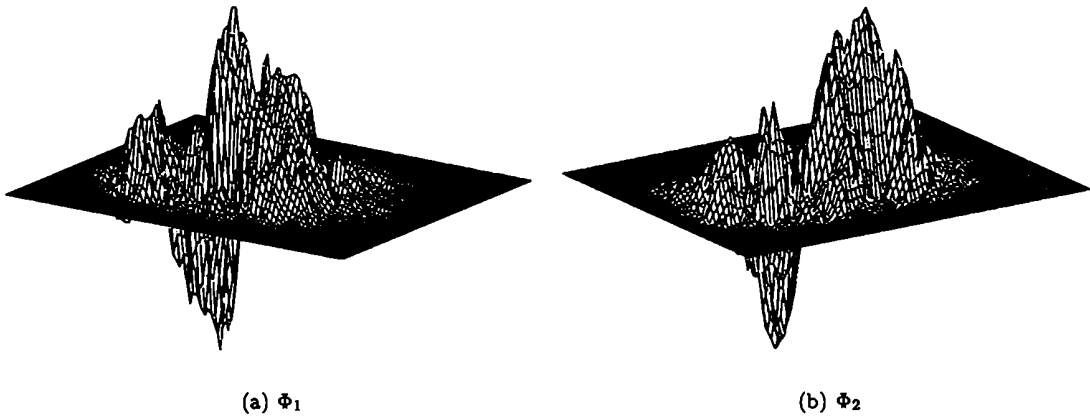


Figura A.3: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D2a2b1-095.

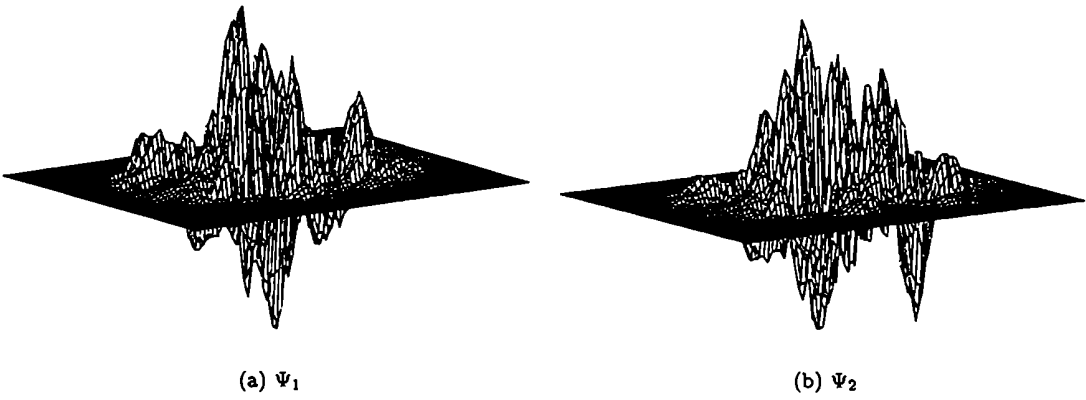


Figura A.4: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D2a2b1-095.

Caso D2a2b1-081

Asociada a D_2 , tiene aproximación polinomial de orden 2 y balanceo de orden 1.

Las matrices-filtro verifican $F(-1,-1) = 0$.

En la figura A.5 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.6, está el gráfico de la multiwavelet. Las matrices-filtro verifican $F(-1,-1) = 0$.

C =	-2.592566632745038e - 02	3.744699178489502e - 02	1.323963014313383e - 01	-5.402818841109086e - 02
	-6.871261590512233e - 02	-3.082641914034970e - 01	3.331300348199493e - 02	8.257433230141883e - 02
	9.101779474899736e - 02	1.147594849880903e - 03	1.879818799990289e - 01	1.650659000798863e - 01
	3.340928686738988e - 01	4.491468438892672e - 01	1.031992112251045e + 00	6.843827156738546e - 01
	1.001671974143504e + 00	6.889337709218273e - 01	-5.060233419523893e - 01	-2.082196881863916e - 01
F =	-2.521252867169303e - 01	-1.720458506197366e - 02	8.369373186488886e - 02	4.082100799627226e - 02
	5.457525792961077e - 02	1.100177891678667e - 01	9.432610211977052e - 02	2.596028291177161e - 01
	-1.345941232130003e - 01	3.877598567725661e - 02	-2.765948963639652e - 02	2.976809087462491e - 02
	1.265442752812728e - 01	-5.270803250075925e - 02	-4.014336198897893e - 02	-6.465762486853062e - 03
	3.431910340295161e - 02	9.056581868305330e - 02	4.278074152313938e - 02	2.233397005025604e - 01
	-1.030244589036089e - 01	3.884651927019812e - 01	1.076617041914698e - 01	-2.991279828567442e - 01
	6.469317730309792e - 01	-7.240195732995425e - 01	-4.378488471119604e - 01	7.065039887323012e - 01
	6.223429988194490e - 01	-5.990080922888163e - 01	4.911572165652078e - 01	-8.501352143410924e - 01
	1.641760277533065e - 01	-2.467053380405102e - 01	2.474569759125719e - 01	-2.814270072493299e - 01
	-6.616332019406033e - 02	-2.049768622939048e - 01	6.728234604911705e - 02	1.38989567428485e - 01
	-4.813292879725325e - 02	-8.606585078521337e - 03	-1.560286466880401e - 01	4.600449840297642e - 02

$$\begin{aligned} v_{00}^T &= [\quad 1 \quad 1 \quad] \\ v_{10}^T &= [\quad -2.590118834982359e - 02 \quad -2.721035516546056e - 01 \quad] \\ v_{01}^T &= [\quad -1.170391652697625e + 00 \quad -7.879636384567043e - 01 \quad] \end{aligned}$$

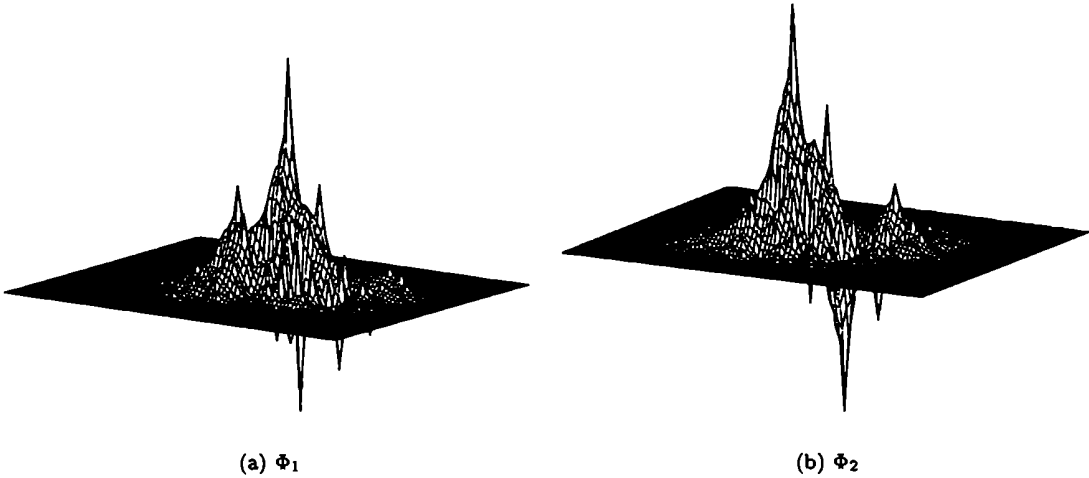


Figura A.5: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D2a2b1-081.

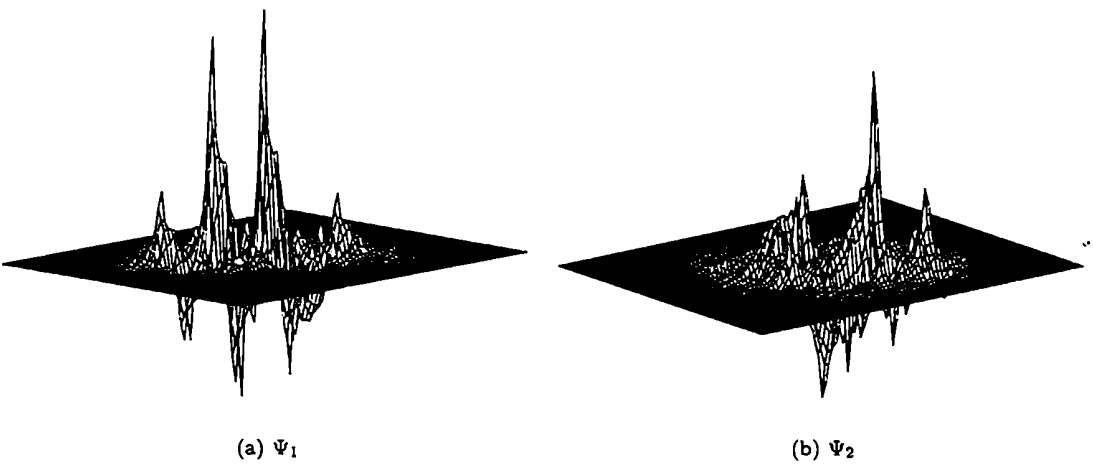


Figura A.6: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D2a2b1-081.

Caso D1a3b1-091

Asociada a D_1 , tiene aproximación polinomial de orden 3 y balanceo de orden 1. En la figura A.7 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.8, está el gráfico de la multiwavelet.

$C =$	-3.882209666524670e - 01	-7.735576126049972e - 01	1.137019138141555e - 01	4.990388597666440e - 01
	3.374762968059033e - 01	3.332768889672971e - 01	-1.789826374520361e - 01	-1.747832399133094e - 01
	1.904968500075366e - 01	1.867626764116095e - 01	-9.899048908139348e - 02	-1.052653254685283e - 01
	0.228525492882640e - 01	4.79052618471348e - 02	-4.643580002342938e - 01	1.105931228690325e - 01
	2.871485768918580e - 01	1.670979476349427e - 01	3.043567740841043e - 01	4.244091033110577e - 01
$F =$	-1.304755982588444e - 01	-1.317839281603040e - 01	-2.110307528872056e - 01	-2.087224227858691e - 01
	2.275618379808644e - 01	2.266849866661853e - 01	3.639445130853422e - 01	3.648213642800862e - 01
	3.531593643568345e - 01	4.336192149006032e - 01	6.713596864813778e - 01	5.908998379378360e - 01
	-7.652376134452978e - 01	7.197212319323598e - 02	3.509757646097212e - 01	-1.407316093024565e - 01
	1.955665541882537e - 01	2.046904632289429e - 01	-5.801294713459913e - 02	-6.33718725275678e - 02
	1.223510378782564e - 01	1.087374588724914e - 01	-3.903843462790210e - 02	-3.104295047431205e - 02
	-4.244623790504836e - 01	8.247193964672112e - 01	3.081404844014514e - 01	-4.275280040636338e - 01
	-4.303044400096424e - 01	3.230589954283159e - 01	-7.191767340008874e - 01	7.517016180180296e - 01
	2.685492877588388e - 02	3.506504730835759e - 02	-1.740393906617665e - 02	-1.374311476564110e - 03
	-6.637550966471432e - 02	-5.087303491717134e - 02	1.089086178455767e - 02	2.163402225236662e - 02
	1.595735299878148e - 01	-3.453394582414093e - 01	6.210634866343659e - 01	-4.647287350063863e - 01

$$\begin{aligned} \psi_{00}^T &= [\quad 1 \quad 1 \quad] \\ \psi_{10}^T &= [\quad 2.133974596215512e + 000 \quad 2.133974596215319e + 000 \quad] \\ \psi_{01}^T &= [\quad 1.499999999999947e + 000 \quad 1.499999999999953e + 000 \quad] \\ \psi_{11}^T &= [\quad 4.803847577293260e + 000 \quad 4.303847577292230e + 000 \quad] \\ \psi_{20}^T &= [\quad 3.450961894323090e + 000 \quad 2.950961894322943e + 000 \quad] \\ \psi_{21}^T &= [\quad 1.999999999999852e + 000 \quad 2.499999999999847e + 000 \quad] \end{aligned}$$

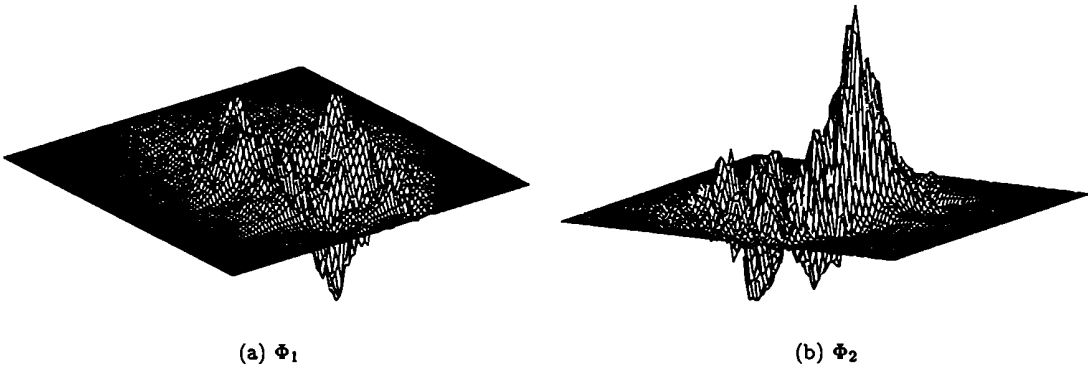


Figura A.7: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a3b1-091.

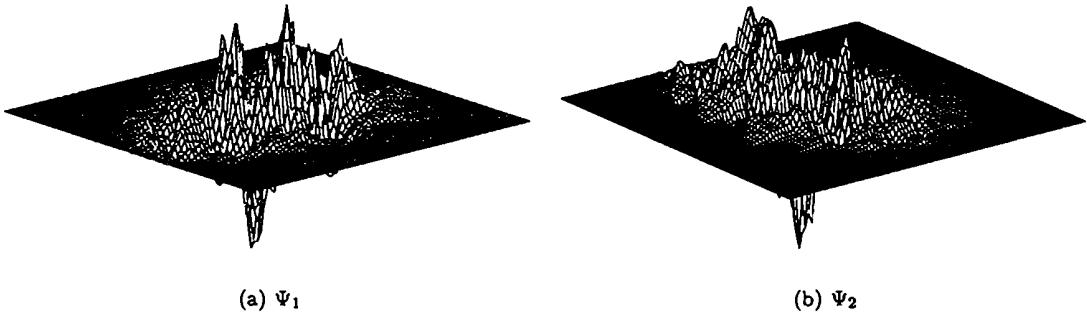


Figura A.8: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a3b1-091.

A.1.2 10 matrices $H^{(k)}$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H^{K(:,j)} = \begin{bmatrix} C_{j,1} & C_{j,2} \\ C_{j,3} & C_{j,4} \end{bmatrix} \quad G^{K(:,j)} = \begin{bmatrix} F_{j,1} & F_{j,2} \\ F_{j,3} & F_{j,4} \end{bmatrix} \quad j = 1, 10$$

Caso D1a3b1-298

Asociada a D_1 , tiene aproximación polinomial de orden 3 y balanceo de orden 1.

Como $S_0^{(00)} = S_1^{(00)} = I$, cualquier vector es autovector a izquierda de estas dos matrices con autovalor 1. Entonces cualquier vector podría ser v_{00} . En particular, $[1 \ 1]$ es autovector a izquierda y hay balanceo de orden 1. Pero con el v_{00} que se lista a continuación se obtiene un grado mayor de aproximación polinomial.

Las matrices-filtro cumplen $H(-1, -1) = 0$ y $G(1, 1) \approx 0$.

En la figura A.9 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.10, está el gráfico de la multiwavelet.

$$C = \begin{matrix} \begin{matrix} 1.359204940404695e-01 & 6.311971963321880e-01 & 1.616705057543348e-01 & 6.659393181109738e-01 \\ 9.508127185035993e-08 & -2.740213909400890e-07 & 1.177907031327383e-07 & -2.785805889247673e-07 \\ -2.035818022749411e-01 & -4.063537119109276e-01 & -2.009278631891048e-01 & 2.765855213516106e-01 \\ 2.210759895138481e-01 & 2.981081813482772e-01 & 2.408822326067172e-01 & 3.495089326627108e-01 \\ 3.310506740579384e-01 & -1.322875499999516e-01 & 3.372378285270623e-01 & -1.329087296330149e-01 \\ 6.548156671732812e-02 & -1.230644129240574e-02 & 3.090199425421111e-01 & 1.350607249148865e-01 \\ 7.365807502741777e-01 & -9.255657626976439e-02 & -2.9798058824612655e-01 & 1.903836432009938e-01 \\ 2.458940751957199e-01 & 2.007981700453903e-01 & 2.580260487392057e-01 & 1.635191332445694e-01 \\ -1.166461247821104e-07 & -2.576772396597271e-07 & 1.119594967377597e-07 & 2.471327081764756e-07 \\ 4.675462714612015e-01 & -4.865996358127930e-01 & -8.079273425658427e-01 & 3.319114884239216e-01 \end{matrix} \\ \\ \begin{matrix} 1.904688610052221e-001 & -8.565785326584260e-001 & -2.797540757541763e-001 & 8.11550372981532e-003 \\ -7.589032335032193e-007 & -1.147186983936528e-006 & -8.459173383174229e-008 & -3.321219199684578e-007 \\ -4.823693995250037e-001 & -1.309200031369950e-001 & 5.432733553897132e-001 & 1.613076570010270e-001 \\ -1.432733709303555e-001 & 3.135815619765912e-001 & -1.146643787852689e-001 & -6.353229115940801e-001 \\ 9.107503829326920e-002 & -8.698255034802933e-002 & 3.296282410951296e-001 & -1.759522774618963e-001 \\ 4.552138285406645e-001 & 1.515696394653800e-001 & -5.076920559820487e-001 & -1.676968323756238e-001 \\ 3.152279247617825e-001 & 8.104699060651852e-002 & 4.002880570880124e-001 & 1.202348707164554e-001 \\ -1.382688089814204e-001 & 6.299819813601732e-001 & 6.479280401931143e-002 & 7.024658193921433e-001 \\ 1.497266930300363e-007 & 1.539974803118344e-007 & -8.376815872299807e-007 & 7.420946677417104e-008 \\ -2.880716247226716e-001 & -1.016967863751499e-001 & -4.358710472917484e-001 & -1.138470436123820e-001 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} v_{00}^T = [& -1.728563277825163e+00 & 2.506145275098607e+00 &] \\ v_{10}^T = [& -3.020963796550208e+00 & 5.032678856540183e+00 &] \\ v_{01}^T = [& -2.171710354076229e+00 & 2.032691145711722e+00 &] \\ v_{20}^T = [& -6.548670095083748e+00 & 9.231024342545068e+00 &] \\ v_{11}^T = [& -3.442781741181936e+00 & 4.325157882950509e+00 &] \\ v_{02}^T = [& -3.528358381224415e+00 & 1.096970923981349e+00 &] \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} S_0^{(00)} = [& 9.999999994495196e-01 & 4.846047006113249e-10 &] \\ & 5.915233389248811e-10 & 1.000000000163273e+00 &] \\ S_1^{(00)} = [& 9.99999999493695e-01 & 2.670776377833306e-10 &] \\ & -8.851055444125677e-10 & 1.000000000565518e+00 &] \end{matrix}$$

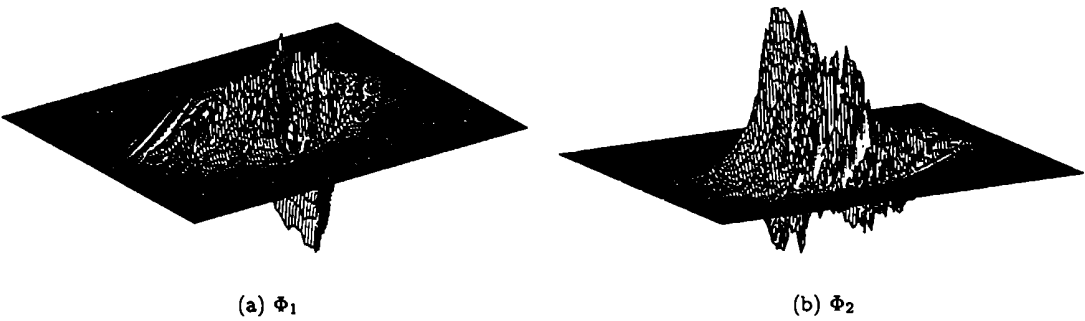


Figura A.9: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a3b1-298.

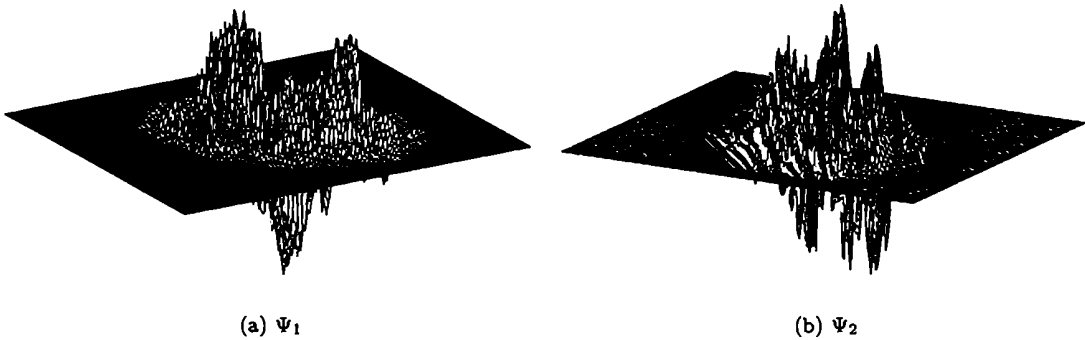


Figura A.10: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a3b1-298.

A.1.3 14 matrices $H^{(k)}$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H^{K(:,j)} = \begin{bmatrix} C_{j,1} & C_{j,2} \\ C_{j,3} & C_{j,4} \end{bmatrix} \quad G^{K(:,j)} = \begin{bmatrix} F_{j,1} & F_{j,2} \\ F_{j,3} & F_{j,4} \end{bmatrix} \quad j = 1, 14$$

Caso D1a2b2-299

Asociada a D_1 , tiene aproximación polinomial de orden 2 y balanceo de orden 2.

Las matrices-filtro cumplen $H(-1, -1) = 0$, $G(1, 1) \approx 0$ y $\nabla I(1, 1) \approx 0$.

En la figura A.11 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.12 está el gráfico de la multiwavelet.

$C =$	1.585483783633799e - 008	-9.173108001348712e - 009	-2.187870543078087e - 008	5.502619787767834e - 008
	-1.218638209274275e - 001	1.971010220023021e - 002	-2.187548319064830e - 001	-1.718737059452474e - 001
	-3.455338057897005e - 002	-2.485138654755610e - 001	1.249412460963943e - 001	3.580337670357259e - 001
	5.324353280387134e - 001	1.786998812033339e - 001	-1.948168717921817e - 001	-2.553633185009802e - 002
	-1.473611750316069e - 001	-1.785530088218145e - 001	5.697320593704267e - 002	6.903310649676356e - 002
	4.813064861125998e - 002	1.856002601869402e - 001	4.661963369929345e - 002	1.797747407643796e - 001
	9.992212635486304e - 001	4.904565743283271e - 001	-2.274744425605081e - 001	6.979222732161917e - 001
	3.934264291087851e - 001	-1.188134631482072e - 001	5.118227825672005e - 001	7.534385697306673e - 001
	1.132346256346739e - 002	-9.345320321966452e - 003	2.169299420240613e - 001	-1.790336669671742e - 001
	3.105221436478784e - 002	-8.052591943762313e - 003	-9.868287687908960e - 002	2.559114375554932e - 002
	5.402344615755583e - 002	3.995073083403762e - 002	-3.726648282112219e - 001	3.690840246962453e - 002
	1.168192016572322e - 001	-2.571441875409076e - 001	-4.918843604019518e - 002	2.396055841362300e - 001
	1.173463662710675e - 001	-9.399510247289554e - 002	2.012948982144777e - 001	1.513606326475689e - 002
	-2.961577929835902e - 011	-1.300493780910994e - 009	2.009865399627413e - 010	-8.121254935246290e - 011
$F =$	2.087982640018401e - 008	-3.023539089453645e - 008	1.968497198980441e - 009	-2.482620833584962e - 008
	3.971371269179702e - 001	2.211241620751068e - 001	-3.095424264909719e - 002	3.488005248043516e - 002
	-1.442493453663821e - 001	-2.914480408541328e - 001	-3.666546474797408e - 002	-1.784197368812792e - 001
	-1.653431443239266e - 001	-1.091090231606784e - 001	2.995817555528442e - 001	9.493808873646058e - 002
	4.154077443757203e - 002	6.034126209680288e - 002	-8.336601065912268e - 002	-1.010003857622832e - 001
	3.740118158351851e - 002	1.442258641719899e - 001	-3.489206197086174e - 002	-1.333545704014310e - 001
	-4.445464763786545e - 001	3.246201804541208e - 001	2.404178586014319e - 001	-6.182253422392994e - 001
	7.286533533477891e - 001	-7.384408405201247e - 001	5.234696235043870e - 001	2.267411115417681e - 001
	-3.086129083509468e - 001	2.547001581719000e - 001	-2.586880630917947e - 002	2.110209767535695e - 002
	-5.578658143587689e - 002	1.446634977587324e - 002	-1.501501541886476e - 001	3.893752504673550e - 002
	-2.217956116005082e - 001	3.117585325439517e - 002	4.607679109232459e - 001	-2.849459139608821e - 002
	-9.981308626299330e - 003	1.034832137851745e - 001	-2.451145643329542e - 001	6.599415917704545e - 001
	1.455767203314059e - 001	-7.139012765839659e - 003	2.690960607758307e - 003	1.729570932195203e - 001
	1.115023707640523e - 008	-2.817592494373199e - 008	-3.123484270910236e - 010	5.077263471141275e - 008

$$v_{00}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_{10}^T = \begin{bmatrix} -1.65587902717876e - 009 & 1.603856022867574e - 009 \end{bmatrix}$$

$$v_{01}^T = \begin{bmatrix} -9.558949925190764e - 010 & 1.097855474724196e - 009 \end{bmatrix}$$

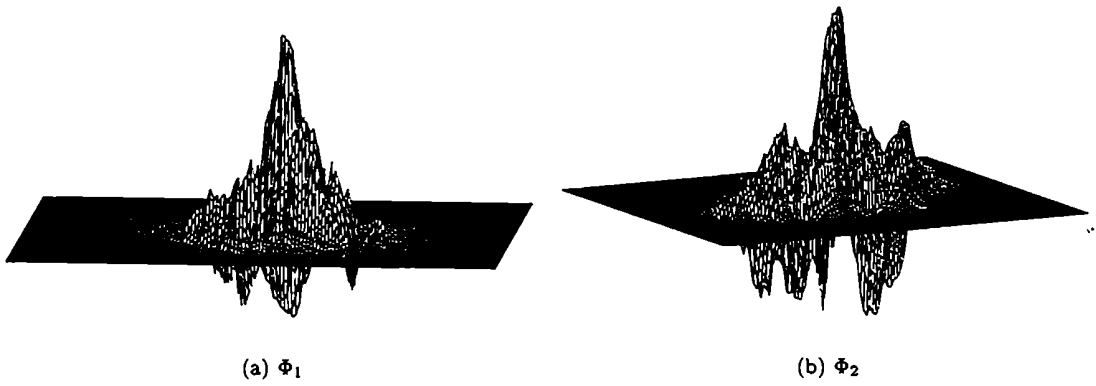


Figura A.11: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a2b2-299.

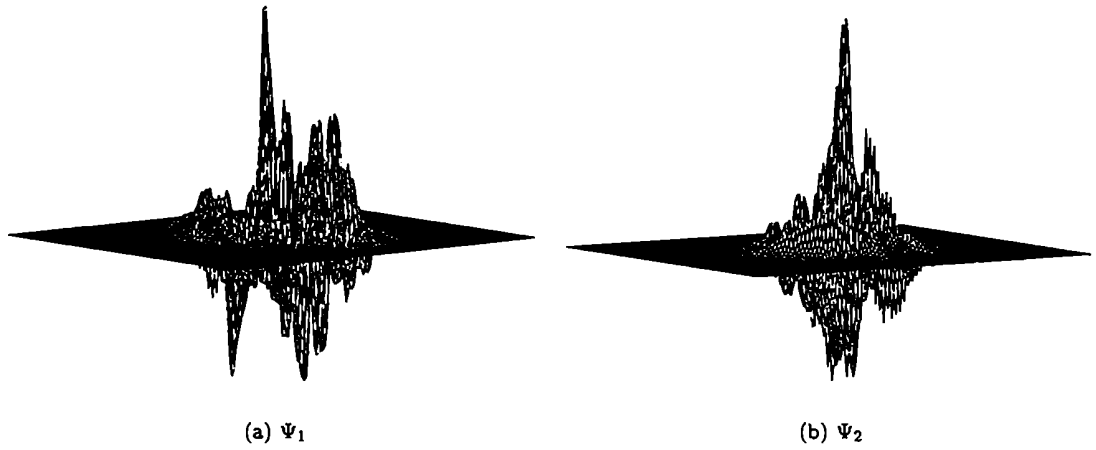


Figura A.12: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a2b2-299.

A.1.4 18 matrices $H^{(k)}$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H^{K(:,j)} = \begin{bmatrix} C_{j,1} & C_{j,2} \\ C_{j,3} & C_{j,4} \end{bmatrix} \quad G^{K(:,j)} = \begin{bmatrix} F_{j,1} & F_{j,2} \\ F_{j,3} & F_{j,4} \end{bmatrix} \quad j = 1, 18$$

Caso D1a3b1-691

Asociada a D_2 , tiene aproximación polinomial de orden 3 y balanceo de orden 1.

Las matrices-filtro cumplen $H(-1, -1) = 0$, $\nabla H(-1, -1) = 0$, $\nabla^2 H(-1, -1) = 0$, $G(1, 1) = 0$, $\nabla G(1, 1) = 0$, $\nabla^2 G(1, 1) = 0$ y $\nabla I(1, 1) = 0$.

En la figura A.13 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.14 está el gráfico de la multiwavelet.

$$C = \begin{bmatrix} -7.676681737331555e-03 & -1.800628466756745e-02 & -3.262586850656414e-02 & -6.862965319594380e-02 \\ -5.777029000654312e-02 & 5.596475347677797e-01 & 4.366339763966613e-02 & -1.029099268509471e-01 \\ 2.320482074377012e-01 & 8.098466931480185e-01 & -8.014547650802790e-02 & -2.174263458637924e-01 \\ 1.541699926636972e-01 & 4.074252174849357e-01 & -1.266319820203958e-01 & 1.940648664509475e-02 \\ -4.264785660948585e-02 & 1.298915261680141e-01 & 1.591363305682723e-01 & 3.211064197473414e-01 \\ 3.604091724363745e-02 & 9.061671169687957e-02 & 2.491937172117110e-01 & 5.797596701083157e-01 \\ 3.211738860657933e-01 & -1.265355512890541e-01 & 1.895493068974861e-02 & 2.560171417770199e-02 \\ -2.560148512183114e-02 & 1.895490932371631e-02 & -1.265356622857294e-01 & -3.211739878927785e-01 \\ -5.797596616642996e-01 & 2.491938391014932e-01 & 9.061669733937130e-02 & -3.604086902716809e-02 \\ -3.211055298768434e-01 & 1.591364018110787e-01 & 1.298915631027565e-01 & 4.264788049967948e-02 \\ -1.94063429048343e-02 & -1.266320637413509e-01 & 4.074253002192344e-01 & -1.541700237096979e-01 \\ 2.174262940716100e-01 & -8.014545642902055e-02 & 8.098467462914564e-01 & -2.320480468126808e-01 \\ 1.029099764096597e-01 & 4.366333191230456e-02 & 5.596475008358056e-01 & 5.777024146398755e-02 \\ 6.862975689337350e-02 & -3.262591322547495e-02 & -1.800626519163009e-02 & 7.6766817979242073e-03 \\ -1.670267210359667e-02 & 1.386620261346148e-02 & -1.149977653519566e-01 & 7.559027761407097e-02 \\ 3.800711927501486e-03 & -8.011769972382422e-03 & 2.469210034195785e-02 & -1.006126331657131e-02 \\ 1.006126718542787e-02 & 2.469215102776983e-02 & -8.011771151254036e-03 & -3.800648455827771e-03 \\ -7.559021569346361e-02 & -1.149977810403876e-01 & 1.386618816576228e-02 & 1.670266704222660e-02 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -2.904772647107222e-02 & -6.092372995000143e-02 & 1.641403678779469e-02 & 3.651338604134514e-02 \\ -2.561043416621321e-01 & -1.984745425697163e-01 & -4.063906548823623e-01 & -2.427336123691436e-01 \\ 2.553247635276005e-01 & 3.508172366980110e-01 & 4.189117092851097e-01 & 6.321843717640014e-01 \\ -2.204336825937889e-01 & -2.078617176108751e-01 & -8.463028926583166e-02 & -3.274245668314886e-01 \\ 1.933608991720845e-01 & 2.662472529709452e-01 & -1.372779009888785e-02 & -1.966235821047690e-01 \\ -2.366519231481610e-01 & -4.567694788051869e-01 & 1.710924883739774e-01 & 3.373556733929335e-01 \\ -2.086131234865212e-01 & 1.401416795965695e-01 & -2.186481763858121e-01 & 9.595223609484102e-02 \\ 9.595211396234715e-02 & 2.186481424669168e-01 & -1.401417510903238e-01 & -2.086129104746682e-01 \\ 3.373556792117917e-01 & -1.710925031322607e-01 & 4.567694445851030e-01 & -2.366519423722117e-01 \\ -1.966234916844790e-01 & 1.37277723848028e-02 & -2.662471485826307e-01 & 1.933608395607457e-01 \\ -3.274244005512183e-01 & 8.463027385831111e-02 & 2.078617539708238e-01 & -2.204336731612760e-01 \\ 6.321844504902909e-01 & -4.189116607471705e-01 & -3.508172315999681e-01 & 2.553246553796781e-01 \\ -2.427335263643445e-01 & 4.063807126959025e-01 & 1.984745622942293e-01 & -2.561043882659167e-01 \\ 3.651332740071130e-02 & -1.641402198476032e-02 & 6.092368900636538e-02 & -2.904769409913837e-02 \\ 1.079402486063018e-01 & -3.145094294168439e-02 & -7.810851735724883e-02 & 2.585605524114773e-02 \\ 2.266674322523625e-02 & -7.372010643382483e-03 & -1.056892231841977e-02 & 1.047802371338519e-02 \\ 1.047796458114367e-02 & 1.056891535124376e-02 & 7.371995136947689e-03 & 2.266674076287575e-02 \\ 2.585601740682022e-02 & 7.810851434252261e-02 & 3.145090668352720e-02 & 1.079402775038917e-01 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_{00} &= [1 \quad 1] \\ v_{10} &= [6.026297688062700e-002 \quad -1.814358597181103e+000] \\ v_{01} &= [-1.868081007004267e+000 \quad 9.206123907268971e-001] \\ v_{20} &= [2.648279773438635e+000 \quad 6.472565969993439e-001] \\ v_{11} &= [-2.679391169766528e+000 \quad 8.965035652896843e-001] \\ v_{02} &= [-5.205839782403163e-001 \quad 4.857833932468711e+000] \end{aligned}$$

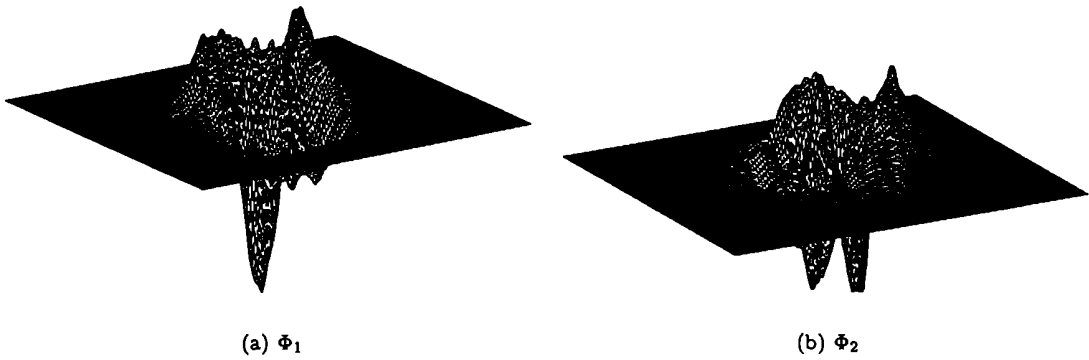


Figura A.13: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a3b1-691.

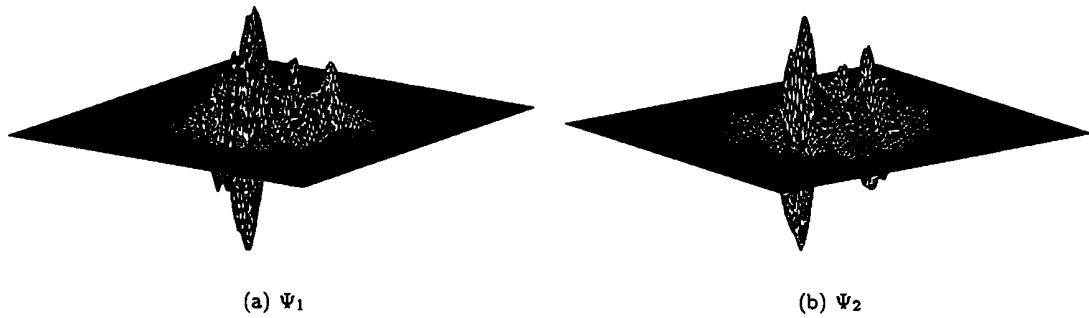


Figura A.14: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a3b1-691.

Caso D2a3b1-699

Asociada a D_2 , tiene aproximación polinomial de orden 3 y balanceo de orden 1.

Las matrices-filtro cumplen $H(-1, -1) = 0$, $\nabla H(-1, -1) = 0$, $\nabla^2 H(-1, -1) = 0$, $G(1, 1) \approx 0$, $\nabla G(1, 1) \approx 0$, $\nabla^2 G(1, 1) \approx 0$ y $\nabla I(1, 1) \approx 0$.

En la figura A.15 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.16 está el gráfico de la multiwavelet.

$C =$

8.002028818074834e - 02	2.143856588139253e - 01	-1.176756230768965e - 02	-3.152350363698973e - 02
-1.143588481997982e - 01	3.645567763169111e - 01	8.292928131260503e - 02	-6.738269196385821e - 02
2.143186409883840e - 01	7.9222044489128410e - 01	-1.271557848249149e - 01	-1.818384593498256e - 01
2.784063663972542e - 01	5.470363830177505e - 01	5.468435582142122e - 03	2.347801014187491e - 01
-5.026907280779080e - 02	1.193711927552582e - 01	2.155632588436764e - 01	3.452352901083590e - 01
-3.838146356923897e - 02	3.355046864298984e - 02	1.128003466726730e - 01	3.992997238117700e - 01
3.083472485866700e - 01	-2.971302413653622e - 01	-1.153636240345821e - 01	9.250154359637566e - 02
-9.250157071631517e - 02	-1.153636172426833e - 01	-2.971302306179907e - 01	-3.083471837746101e - 01
-3.992996306758340e - 01	1.128003614522100e - 01	3.355046995081347e - 02	3.838151221503599e - 02
-3.482362402400560e - 01	2.155532035011128e - 01	1.193712306508902e - 01	5.026905861758991e - 02
-2.347801112209401e - 01	5.465473203869841e - 03	5.47036355604754e - 01	-2.784063081323122e - 01
1.818385008775618e - 01	-1.271557806415781e - 01	7.922204502696299e - 01	-2.143156147026712e - 01
6.738269803754450e - 02	8.292929038462760e - 02	3.645567586283057e - 01	1.143588225135632e - 01
3.152352442090081e - 02	-1.176753885934739e - 02	2.143856573831508e - 01	-8.002023731156932e - 02
-1.724020609624640e - 02	-1.82755939804010e - 02	-1.177955052910870e - 01	-2.268998580305505e - 02
8.001989172911583e - 02	2.143854224498987e - 01	-1.176870454758836e - 02	-3.152324398380295e - 02
3.152328356501952e - 02	-1.176873143133814e - 02	2.143854719425125e - 01	-8.001987396237932e - 02
2.268997628029878e - 02	-1.177954670819224e - 01	-1.827561882238666e - 02	1.724022538346725e - 02

$F =$

9.227977415085456e - 02	2.942005188104018e - 02	4.296320744096668e - 02	1.369898685053979e - 02
-2.551923778573593e - 01	-1.304257394650998e - 02	-4.239732878819626e - 01	6.217868955622079e - 02
4.138416288420796e - 01	6.574595058580983e - 02	6.381002466211031e - 01	3.381520185033884e - 01
-4.659584642395855e - 01	-2.388904019688227e - 01	-1.237262057274771e - 01	-2.470336588898069e - 01
3.073089063610092e - 01	1.861895218074006e - 01	-9.040200688649720e - 02	-1.532978597424581e - 01
-3.754999178667140e - 01	-2.0338415755931591e - 01	2.680741158594772e - 01	1.950913344506471e - 01
-6.151633771676293e - 02	1.424561303421287e - 01	-4.010223377697499e - 01	1.681234693765553e - 01
1.681235026600028e - 01	4.010223097356517e - 01	-1.424561203226371e - 01	-6.151640454770662e - 02
1.950913321395120e - 01	-2.680741674314803e - 01	2.033841938054421e - 01	-3.754999445893037e - 01
-1.532979591719833e - 01	9.040204257636184e - 02	-1.861895479255622e - 01	3.073089057827321e - 01
-2.470337150156073e - 01	1.23726263799956e - 01	2.388903876750987e - 01	-4.659584631572373e - 01
3.381519980681860e - 01	-6.381002473191708e - 01	-6.574594507442556e - 02	4.138416406270100e - 01
6.217864693152964e - 02	4.239732743929471e - 01	1.304258773022125e - 02	-2.551923712119967e - 01
1.36990268662496e - 02	-4.296321830969536e - 02	-2.942004785423772e - 02	9.227977925559686e - 02
1.119431050228532e - 02	-9.272339294966180e - 02	-2.521028622828816e - 02	6.160810474287540e - 02
-9.227986887388664e - 02	-2.942146453014619e - 02	-4.296305726220039e - 02	-1.369932587232495e - 02
-1.369928738563962e - 02	4.296302922666330e - 02	2.942146622752167e - 02	-9.227985294741356e - 02
6.16081345348672e - 02	2.521026204447164e - 02	9.723341865853935e - 02	1.119430605585757e - 02

$v_{00} = [\quad 1 \quad 1 \quad]$
 $v_{10} = [\quad 8.265532952633370e - 001 \quad 3.032263725679720e - 002 \quad]$
 $v_{01} = [\quad 7.403902926951195e - 001 \quad -1.369962732234301e - 001 \quad]$
 $v_{20} = [\quad 1.080823397338986e - 001 \quad -1.691770127696366e + 000 \quad]$
 $v_{11} = [\quad 1.999003020358724e + 000 \quad -2.572847707835506e - 001 \quad]$
 $v_{02} = [\quad 6.334487971571459e - 001 \quad 2.201303294794954e + 000 \quad]$

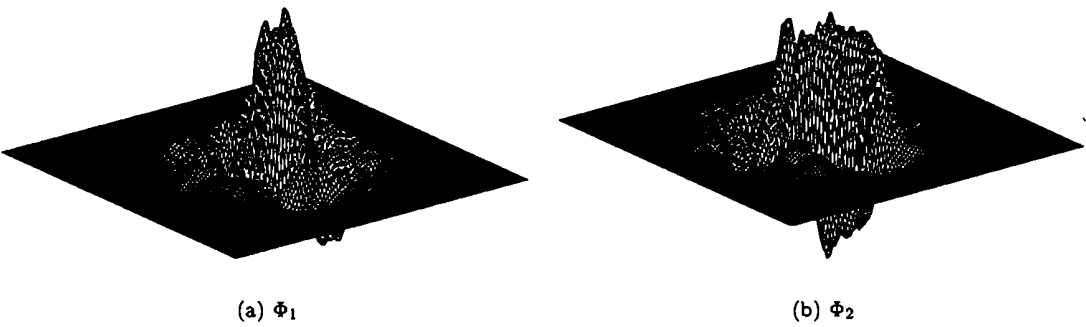


Figura A.15: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D2a3b1-699.

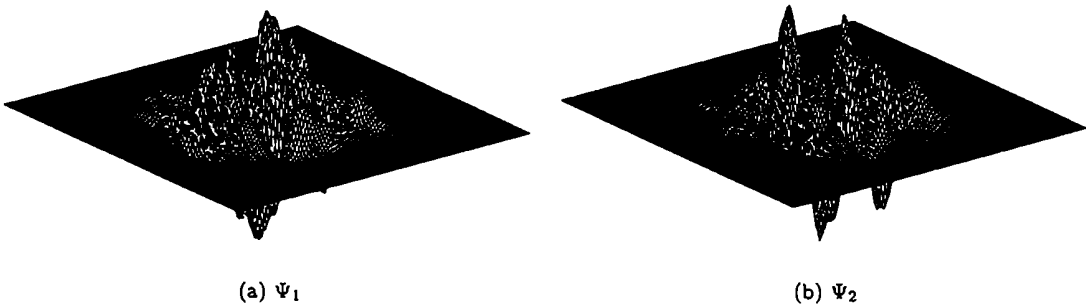


Figura A.16: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D2a3b1-699.

Caso D2a2b2-499

Asociada a D_2 , tiene aproximación polinomial de orden 2 y balanceo de orden 2.

Las matrices-filtro cumplen $H(-1, -1) = 0$, $\nabla H(-1, -1) = 0$, $G(1, 1) = 0$, $\nabla G(1, 1) = 0$ y $\nabla I(1, 1) = 0$.

En la figura A.17 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.18 está el gráfico de la multiwavelet.

$C =$	-9.202072757022481e - 02 -7.514465457226407e - 02 2.460078960178408e - 01 2.704598063764237e - 01 -1.530481771535136e - 02 -2.071836318067843e - 02 4.705170528571775e - 01 5.384949499360149e - 01 -1.098896199273217e - 01 -1.283581452772623e - 02 5.591668901351264e - 01 2.742083986591646e - 01 3.577543562728547e - 01 2.742083986591646e - 01 1.248084116957960e - 03 4.714311538824083e - 02 1.248084116957960e - 03 6.254136413863719e - 02 -4.174993394180103e - 01 -8.414900602936709e - 02	2.121899192614539e - 01 -1.501198529490192e - 02 -3.907089057387634e - 01 -1.036152467300218e - 01 -3.117590584517424e - 02 3.153589099329080e - 01 2.883840216082162e - 01 -2.677240547008755e - 02 -6.480835608334244e - 02 1.148935249705596e - 01 1.268323175693516e - 01 -2.696188942210803e - 01 2.319272460242027e - 01 1.331442963827208e - 02 -1.768774007528323e - 01 1.289583247181990e - 02 -1.957627405350667e - 01 -4.144395632526846e - 02	-3.954725777710372e - 03 -1.055600014863127e - 01 1.814878127692222e - 01 3.087840985649198e - 02 -1.078231488603165e - 01 2.769471157640822e - 02 -5.648270794827338e - 02 -5.248038262864768e - 01 -7.987014322355679e - 02 3.023278178921931e - 01 -1.336342718906081e - 01 3.851203344633379e - 01 1.783650995479739e - 01 -2.657088765319778e - 01 2.903056921372946e - 02 1.329864586040654e - 01 -7.118276776068309e - 03 1.706516469685593e - 02	3.050732143493001e - 02 7.919401379307894e - 02 9.642684711734541e - 03 1.953288706290261e - 01 1.645398796955066e - 01 1.313029309495921e - 01 8.001126592296544e - 01 5.089069539692260e - 01 -1.735189889779463e - 02 4.924442294682076e - 02 9.236548328909892e - 02 4.134243672301164e - 01 5.576340198106872e - 04 -2.227748180438723e - 01 -1.691414875928634e - 01 -1.463323343540613e - 01 8.876761117895430e - 02 -8.29463539670434e - 03
$F =$	1.469604538230460e - 01 1.397840966690090e - 01 -4.243151056685026e - 01 1.872393466905442e - 01 -3.662432660878706e - 02 -8.837327683184504e - 03 2.292458776303935e - 01 -1.521330446123482e - 01 1.904958480463601e - 01 -1.089102014479069e - 01 8.344824036845477e - 02 2.217608309711699e - 01 2.440978779548018e - 01 -7.331425054931233e - 03 4.806097736073317e - 03 -1.241666543750311e - 01 -2.570311386404774e - 01 1.300023069124928e - 01	-3.428603302933819e - 01 7.920507701229568e - 03 6.182331681731801e - 01 -5.003615108316620e - 01 2.989259410207614e - 01 2.114829305693812e - 01 3.420477634215208e - 01 -5.667383271306479e - 01 1.063175625001106e - 01 -5.696786989913417e - 02 3.584449420872980e - 02 -1.080667840937730e - 01 1.421112346207536e - 01 -2.222257570720376e - 02 -1.319127320230592e - 01 6.783963670916784e - 03 -1.079552704607635e - 01 6.741784184038612e - 02	-3.583577516720671e - 02 1.907563895686446e - 01 -2.740288641186419e - 01 1.746023684365583e - 01 6.031718019893548e - 02 1.374182290378853e - 02 -3.362872183265151e - 01 7.458334877191681e - 01 1.178308886333611e - 01 1.347825398652045e - 01 -5.848449791641036e - 01 1.589459749817733e - 01 6.023353642819543e - 02 -1.217984611517955e - 01 1.306886860809642e - 02 -2.584331521488268e - 01 1.879453792989767e - 02 -7.767912982991730e - 02	3.621465911922494e - 02 -1.777873684399306e - 01 -2.122964778213926e - 01 -4.484226745759814e - 01 1.100726469376281e - 02 4.115264812759586e - 02 8.831836106093453e - 02 4.579633516003656e - 01 5.634380344158274e - 03 -1.632899811267440e - 02 -1.775830776002824e - 01 2.0016306633883931e - 01 -1.255966358762427e - 02 -1.007376266873097e - 01 -6.631543195587963e - 02 3.238149150401827e - 01 5.017189737277958e - 02 -2.409242445182481e - 03

$$v_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$v_{10} = \begin{bmatrix} -8.350716093319319e - 009 & 8.372684095179815e - 009 \end{bmatrix}$$
$$v_{01} = \begin{bmatrix} -6.133153913787786e - 009 & 6.133363256302630e - 009 \end{bmatrix}$$

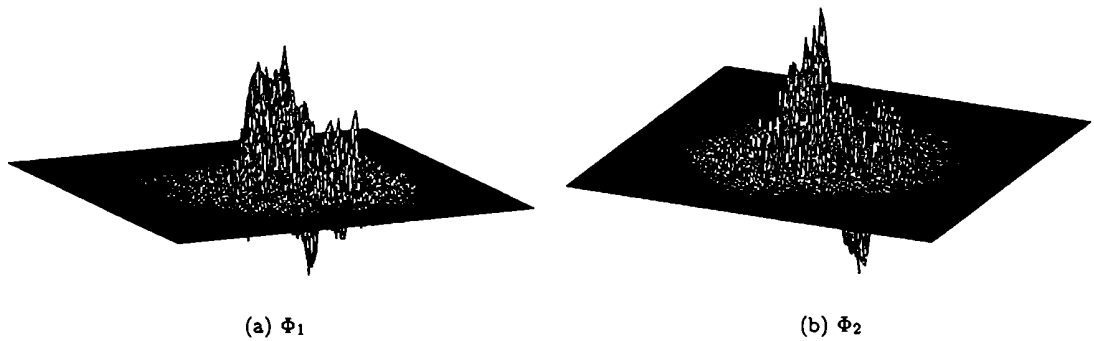


Figura A.17: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D2a2b2-499.

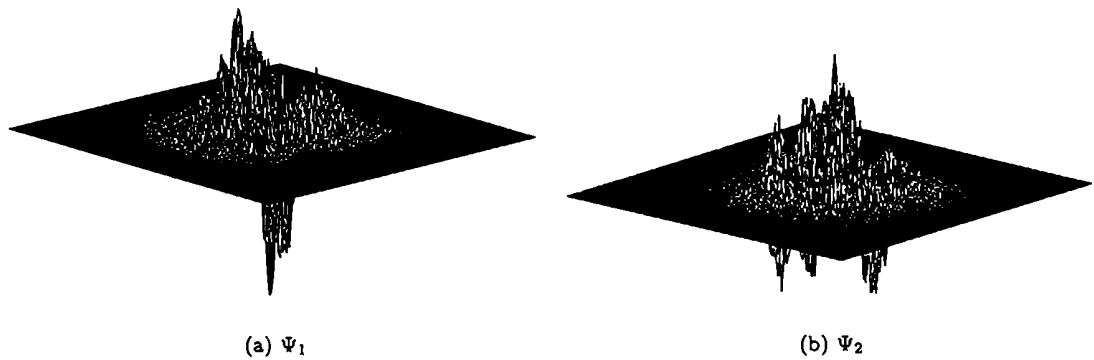


Figura A.18: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D2a2b2-499.

Caso D1a3b2-699

Asociada a D_1 , tiene aproximación polinomial de orden 3 y balanceo de orden 2.

Las matrices-filtro cumplen $H(-1, -1) \approx 0$, $\nabla H(-1, -1) = 0$, $\nabla^2 H(-1, -1) = 0$, $G(1, 1) \approx 0$, $\nabla G(1, 1) = 0$, $\nabla^2 G(1, 1) \approx 0$ y $\nabla I(1, 1) \approx 0$.

En la figura A.19 está el gráfico de la multifunción de escala, y en la figura A.20 está el gráfico de la multiwavelet.

$C =$

1.020793367303016e - 04	-3.253937154647186e - 04	4.466061411393494e - 04	6.526864945695698e - 04
-9.722517697442402e - 03	2.248668329357175e - 03	7.848866245668152e - 03	-2.549937982300119e - 03
-5.000908836437743e - 03	-6.821889703484408e - 03	-3.259897049631305e - 03	-9.792619412625049e - 03
9.930610497948331e - 03	-2.872972808683479e - 03	-6.959608248110293e - 03	4.613929698075354e - 03
2.162973928023025e - 03	7.986808076485953e - 03	1.861749712159336e - 03	9.880496653578608e - 03
2.526648113605813e - 02	1.903135782636645e - 01	1.946473624931206e - 01	3.356947691706738e - 01
4.336380865220893e - 01	8.739721916516265e - 01	8.780107513699148e - 01	-1.811171083498894e - 01
1.811171261711204e - 01	8.780107088679893e - 01	8.739721563108489e - 01	-4.336381111869340e - 01
-3.356947766636163e - 01	1.946474089813782e - 01	1.903135956425721e - 01	-2.526649281186767e - 02
-9.880501677589914e - 03	1.861755394788347e - 03	7.986806263386061e - 03	-2.162980983354991e - 03
-4.613964060425390e - 03	-6.959628880446147e - 03	-2.872981091249896e - 03	-9.930809927826425e - 03
9.792643903141914e - 03	-3.259886554395018e - 03	-6.821884670988812e - 03	5.000890504207080e - 03
2.549912336630062e - 03	7.848868758410017e - 03	2.248677250278454e - 03	9.722503735394256e - 03
-6.527007963122180e - 04	4.466125111466958e - 04	-3.254017723501331e - 04	-1.020794714703482e - 04
-9.285863308443809e - 02	-7.016110417808982e - 02	-6.480807876824517e - 02	2.050804102947345e - 01
-7.906894659536804e - 04	5.969504689045002e - 05	-1.874552840504128e - 04	2.848770398188084e - 04
-2.848817423977193e - 04	-1.874555094724145e - 04	5.970563261388094e - 05	7.906898021911382e - 04
-2.050804178086782e - 01	-6.480808258815261e - 02	-7.016108161848314e - 02	9.285862672075526e - 02

$F =$

-1.147595802692793e - 04	5.238070565300389e - 04	-2.690992804567702e - 04	-6.179992928321069e - 04
8.938741769938513e - 04	2.048067853462121e - 04	-1.177178472361931e - 02	5.323845124003032e - 03
-3.216696260172453e - 03	-1.277730356319193e - 02	1.820494449580999e - 03	-1.093009557064755e - 03
-1.063680779087041e - 03	-1.738026891914776e - 03	1.258460327423374e - 02	-3.757779838660346e - 03
5.864905611897380e - 03	1.157913323531256e - 02	-1.223295545081806e - 04	8.644924811731444e - 04
-1.092903129114860e - 01	-4.054532312981635e - 01	-4.473781993974213e - 02	9.537092549154585e - 02
-5.104283318322693e - 01	8.908957739374954e - 01	6.445944881651645e - 01	5.211614899675683e - 01
5.211615140953518e - 01	-6.445944993118660e - 01	-8.968957875264634e - 01	-5.104283478197792e - 01
9.537095035968234e - 02	4.473784531867981e - 02	4.054532258556388e - 01	-1.092903052538943e - 01
8.644785086766172e - 04	1.223461596990919e - 04	-1.157909647114133e - 02	5.864903890615891e - 03
-3.757780955517034e - 03	-1.258459785574284e - 02	1.738056071032594e - 03	-1.063699803284893e - 03
-1.093026362681845e - 03	-1.820463697580626e - 03	1.277733224173471e - 02	-3.216712551038669e - 03
5.323822172328701e - 03	1.177180212874839e - 02	-2.047837647078867e - 04	8.938681599248704e - 04
-6.180093224900261e - 04	2.690805228550851e - 04	-5.238036453499531e - 04	-1.147710420267745e - 04
1.612508189506185e - 01	2.795378118700974e - 02	-8.439198943244412e - 02	-1.609267387647008e - 01
-6.474057235693162e - 04	1.866369201852481e - 04	-3.311088244343085e - 04	4.262556043385535e - 04
4.262500954602065e - 04	3.310887485889174e - 04	-1.866395111256070e - 04	-6.474199228418174e - 04
-1.609267221004110e - 01	8.439198684646068e - 02	-2.795381465160767e - 02	1.612508297609952e - 01

$v_{00} = [\ 1 \ 1 \]$

$v_{10} = [\ -3.085746733916652e - 011 \ 8.022944504126093e - 011 \]$

$v_{01} = [\ 2.243769135025508e - 009 \ -2.209357591555219e - 009 \]$

$v_{20} = [\ -1.878361433977069e - 003 \ 1.877168000696364e - 003 \]$

$v_{11} = [\ -4.044929303474870e - 001 \ 4.044951523022735e - 001 \]$

$v_{02} = [\ -4.063734897712448e - 001 \ 4.083700679886310e - 001 \]$

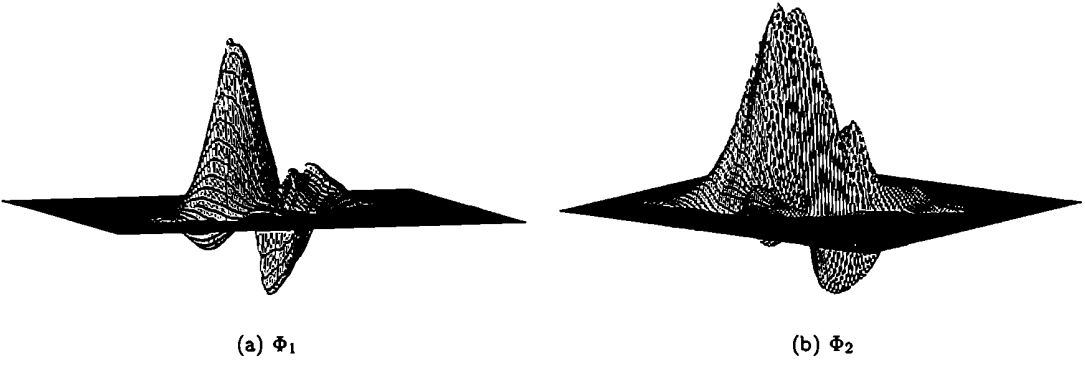


Figura A.19: Φ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a3b2-699.

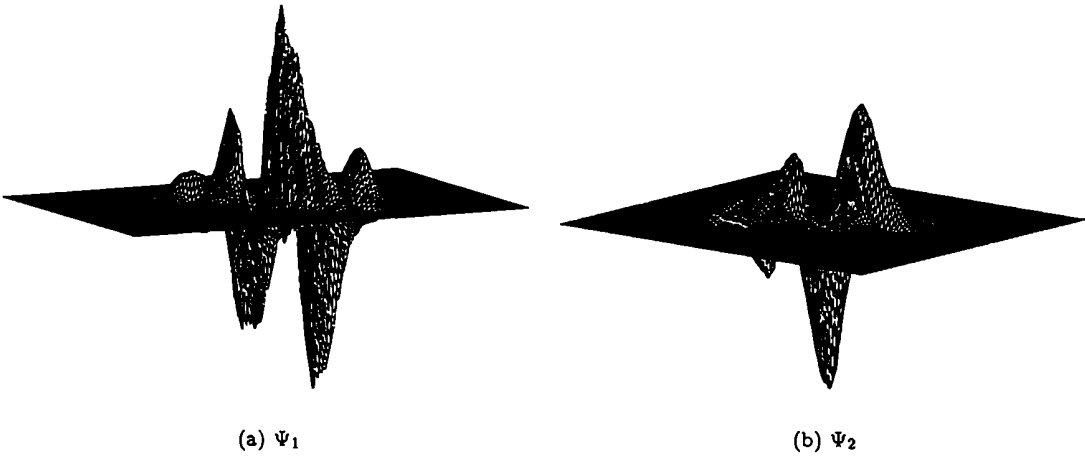


Figura A.20: Ψ : 8 iteraciones del algoritmo para D1a3b2-699.

